BUKU PEGANGAN KULIAH

KALKULUS 1

Disusun

Ismanto,S.Si.,M.Pd

Dr. Ivan Ariful Fathoni, M.Si

Anisa Fitri, M.Pd

Fakhrunnisa, B.Sc., M.Si

Astrid Chandra Sari, M.Pd

Festian Cindarbumi. M.Pd

UNUGIRI

FAKULTAS KEGURUAN ILMU PENDIDIKAN (FKIP)

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS NAHDLATUL ULAMA

SUNAN GIRI BOJONEGORO

Jl. A. Yani No.10 Bojonegoro, Email: unugiri.bjn@gmail.com

DAFTAR ISI

BAB (minggu ke)	MATERI	HAL
BAB 1	**PERSAMAAN SIMULTAN**	
1	1.1 Persamaan Simultan	1
	1.2 Mencari Penyelesaian Persamaan Simultan dengan Metode Substitusi dan Metode Eliminasi	1
BAB 2	**DETERMINAN**	
(2 − 3)	2.1 Determinan	6
	2.2 Determinan Order n	10
	2.3 Menghitung Determinan dengan Metode Ekspansi	12
	2.4 Sifat-sifat Determinan	14
	2.5 Penyelesaian Persamaan Linear Simultan Tidak Homogen	16
BAB 3	**MATRIKS**	
(4 − 5)	3.1 Pengertian Matriks	21
	3.2 Beberapa Jenis Matriks	25
	3.3 Beberapa Operasi Matriks	28
	3.4 Sifat-sifat	30
	3.5 Invers Matriks Bujur Sangkar	31
	3.6 Penyelesaian Persamaan Linear dengan Invers Matriks	32
BAB 4	**BILANGAN KOMPLEKS**	
(7 − 8)	4.1 Bilangan Kompleks	38
	4.2 Bentuk Kartesius Bilangan Kompleks	38
	4.3 Diagram Argand	39
	4.4 Beberapa Operasi Bilangan Kompleks	40
	4.5 Bentuk Polar Bilangan Kompleks	43
	4.6 Satuan Sudut	46
	4.7 Operasi Bilngak Kompleks Bentuk Polar	48
	4.8 Teorema *De Moivre*	49

BAB 5	**VEKTOR**	
(9 − 10)	5.1 Pengertian Vektor	57
	5.2 Skalar	58
	5.3 Aljabar Vektor	58
	5.4 Hukum-hukum Aljabar Vektor	59
	5.5 Vektor Satuan	60
	5.6 Hasil Kali Titik	61
	5.7 Hasil Kali Silang	62
BAB 6	**FUNGSI TRIGONOMETRI**	
(11 − 12)	6.1 Mengukur Sudut	70
	6.2 Fungsi Trigonometri	72
	6.3 Nilai Fungsi Pada Kuadran	73
	6.4 Teorema *Phytagoras*	74
	6.5 Grafik Fungsi Trigonometri	76
	6.6 Periode	84
	6.7 *Leading and Lagging Angle*	84
	6.8 Amplitudo	85
	6.9 Phasor, Waktu Periodik, dan Frekuensi	85
BAB 7	**TURUNAN**	
(14 − 15)	7.1 Definisi	93
	7.2 Rumus Turunan Fungsi Aljabar	94
	7.3 Rumus Turunan Fungsi Trigonometri	97
	7.4 Aturan Berantai	97
	7.5 Turunan Fungsi Eksponen dan Logaritma	99
BAB 8	**INTEGRAL**	
(16 − 17)	8.1 Definsi Integral Tak Tentu	103
	8.2 Rumus-rumus Dasar Integral	103
	8.3 Integral Tertentu	106
	8.4 Menentukan Luas Bidang dengan Integral	107
	8.5 Harga Rata-rata	108
	8.6 Harga Efektif	108

BAB 1

SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Materi Pembelajaran

1.1 Pendahuluan,

1.2 Penyelesaian Persamaan Linear dengan Metode Substitusi,

1.3 Penyelesaian Persamaan Linear dengan Metode Eliminasi,

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini Mahasiswa diharapkan mampu:

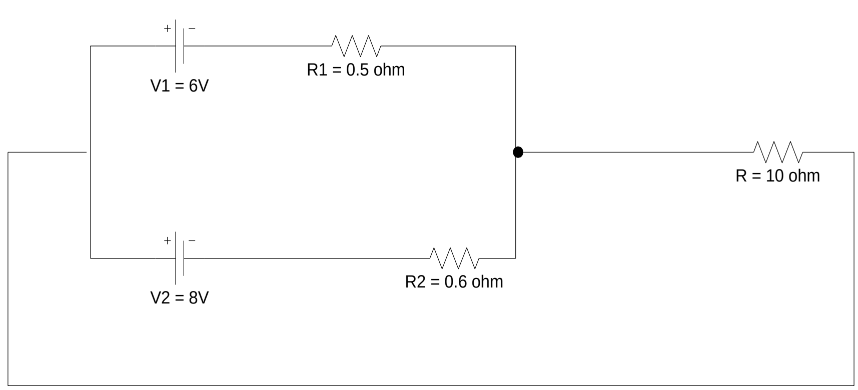
- Memahami pengertian persamaan linear,
- Menerapkan konsep-konsep persamaan linear untuk menyelesaikan masalah-masalah keteknikan, khususnya masalah teknik listrik

1.1 Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari seringkali kita dihadapkan pada masalah persamaan linear. Dua teladan berikut memberikan gambaran kepada kita.

(1) Pada suatu hari Bu Ani membeli 2 buah pisang dan 3 buah jeruk dan harganya Rp. 3250,- . Pada hari yang lain dia membeli 1 buah pisang dan 2 jeruk, ternyata harganya hanya Rp. 2000,-. Jika harga pisang dan jeruk tidak berubah, berapakah harga masing-masing buah?

(2) Seorang teknisi listrik ingin menentukan arus listrik I_1, I_2, dan I_3 yang mengalir pada suatu rangkaian seperti gambar berikut ini.



Dapatkah Anda menghitung besarnya arus yang mengalir pada masing-masing loop?

Kedua ilustrasi di atas adalah beberapa masalah yang bisa dijumpai pada kehidupan sehari-hari. Bagaimana menentukan penyelesaian dari kedua persamaan tersebut? Uraian berikut akan menjelaskan bagaimana mencari penyelesaian persamaan linear (n persamaan dengan n variabel).

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaian persamaan linear, diantaranya adalah metode substitusi, metode eliminasi, metode cramer (perhitungan melalui determinan), dan metode invers matriks. Pada bab ini akan dibahas metode substitusi dan metode eliminasi.

1.2 Penyelesaian Persamaan Linear dengan Metode Substitusi

Prinsip metode Substitusi adalah memadukan persamaan-persamaan yang ada dengan mengganti salah satu variable suatu persamaan dengan nilai variable yang sama dari persamaan yang lain. Mari kita selesaikan masalah pada ilustrasi 1di atas.

Contoh 1

Misalkan harga satuan pisang adalah *a*, dan harga satuan jeruk adalah *b*.

<u>Model matematika</u>

Harga 2 buah pisang, dan 3 buah jeruk adalah Rp. 3250,-

2a + 3b = 3250 ……. (1)

Harga 1 buah pisang, dan 2 buah jeruk adalah Rp. 2000,-

a + 2b = 2000 ……. (2)

Dari persamaan (2) diperoleh: a = 2000 – 2b.

Masukkan a, pada persamaan (1).

Diperoleh

$$
\begin{aligned}
2(2000 - 2b) + 3b &= 3250 \\
4000 - 4b + 3b &= 3250 \\
-4b + 3b &= 3250 - 4000 \\
-b &= -750
\end{aligned}
$$

Jadi b = 750.

Masukkan nilai b pada persamaan (2).

a + 2(750) = 2000

a + 1500 = 2000.

Jadi a = 500

1.3 Penyelesaian Persamaan Linear dengan Metode Eliminasi

Prinsip metode Eliminasi adalah menghilangkan (mengeliminir) salah satu suku dari persamaan-persamaan yang ada dengan menyamakan koefisien suatu suku terlebih dahulu. Mari kita selesaikan ilustrasi (1) di atas.

Contoh 1

Misalkan harga satuan pisang adalah *a*, dan harga satuan jeruk adalah *b*.

Model matematika

Harga 2 buah pisang, dan 3 buah jeruk adalah Rp. 3250,-

2a + 3b = 3250 ……. (1)

Harga 1 buah pisang, dan 2 buah jeruk adalah Rp. 2000,-

a + 2b = 2000 ……. (2)

Penyelesaian:

2a + 3b = 3250 …… (1)

a + 2b = 2000 …… (2)

Samakan koefisien dari a pada kedua persamaan, diperoleh

2a + 3b = 3250 …… (1)

2a + 4b = 4000 …… (2)

– b = – 750 atau b = 750

Samakan koefisien dari b pada kedua persamaan, diperoleh

4a + 6b = 6500 ….. (1)

3a + 6b = 6000 …... (2)

a = 500

Jadi harga satuan pisang adalah Rp. 500,- dan harga satuan jeruk adalah Rp 750,-.

Contoh 2

Dengan metode eliminasi dan atau substitusi tentukan penyelesaian dari persamaan

$$2a - 3b + c = 4$$
$$a + 2b - 3c = -1$$
$$-3a + b + 5c = 7$$

Penyelesaian.

$$2a - 3b + c = 4 \quad \text{(I)}$$
$$a + 2b - 3c = -1 \quad \text{(II)}$$
$$-3a + b + 5c = 7 \quad \text{(III)}$$

Misalkan kita eliminir suku pertama

(I) : $2a - 3b + c = 4$

(2×II) : $\underline{2a + 4b - 6c = -2}$

$-7b + 7c = 6$ (IV)

(III) : $-3a + b + 5c = 7$

(3×II) : $\underline{3a + 6b - 9c =} -3$ +

$7b - 4c = 4$

(IV) : $-\underline{7b + 7c = 6}$ +

$3c = 10$,

Sehingga

$$c = \frac{10}{3},$$

$$7b - 4(\frac{10}{3}) = 4 \Leftrightarrow 7b = 4 + \frac{40}{3} = \frac{52}{3}, \text{atau b} = \frac{52}{21}$$

$$a + 2(\frac{52}{21}) - 3(\frac{10}{3}) = -1 \Leftrightarrow a = -1 - \frac{104}{21} + \frac{30}{3} = \frac{-21 - 104 + 210}{21} = \frac{85}{21}$$

Jadi $a = \frac{85}{21}$, b $= \frac{52}{21}$, dan $c = \frac{10}{3}$

Latihan 1

1. Buatlah dua persamaan linear yang berbeda dengan dua variable (setiap mahasiswa membuat persamaan yang tidak sama dengan mahasiswa lainnya!), kemudian tentukan penyelesaiannya!
2. Buatlah tiga persamaan linear yang berbeda dengan tiga variable (setiap mahasiswa membuat persamaan yang tidak sama dengan mahasiswa lainnya!), kemudian tentukan penyelesaiannya!
3. Tentukan nilai *x*, *y*, dan *z* dari persamaan linear berikut ini!

(a) $\begin{aligned} 2x + y &= 9 \\ x - y - z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - 3z &= -11 \\ x + 2y - z &= -2 \\ -x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 3x - y - 2z &= 1 \\ 2y + 3z &= 7 \\ -2x + y + z &= -2 \end{aligned}$

4. Tentukan nilai *a*, *b*, dan *c* dari persamaan linear berikut ini!

(a) $\begin{aligned} a + b + c &= 6 \\ 2a + b - c &= 1 \\ a - 5b - c &= -12 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3a - 2b - c &= 2 \\ -2a + 3b + c &= 2 \\ a + 2b - 3c &= 22 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} a + 2b - 3c &= -8 \\ -2a + 3b + c &= 6 \\ 3a - b + 2c &= -2 \end{aligned}$

5. Fungsi parabola dalam *x* mengikuti persamaan $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Tentukan fungsi tersebut jika

a. parabola melalui titik-titik: (-1, 2); (1, 6); dan (2, 7),

b. parabola melalui titik-titik: (-1, 22); (1, 2); dan (3, 0),

c. parabola melalui titik-titik: (-1, 4); (1, 8); dan (2, 13),

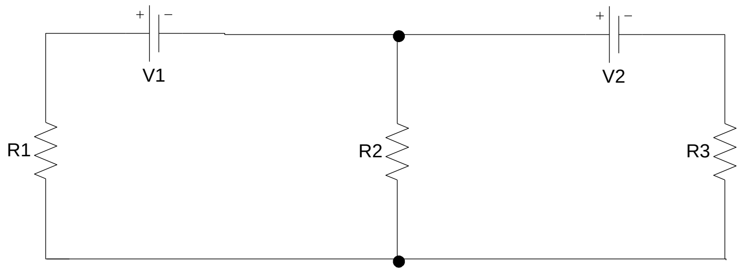
6. Dalam suatu rangkaian listrik diperoleh persamaan linear sebagai berikut.

(a) $\begin{aligned} 2I_1 + I_2 + I_3 &= 1.5 \\ 3I_1 + 4.5\,I_2 - 1.5\,I_3 &= 6 \\ 2.25I_1 + 1.5\,I_2 + 5.25\,I_3 &= 0.75 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3.6\,V_1 + 2.4\,V_2 + 4.8\,V_3 &= 1.2 \\ 1.3V_1 - 3.9\,V_2 - 6.5\,V_3 &= 2.6 \\ 11.9\,V_1 + 1.7\,V_2 + 8.5\,V_3 &= 0 \end{aligned}$

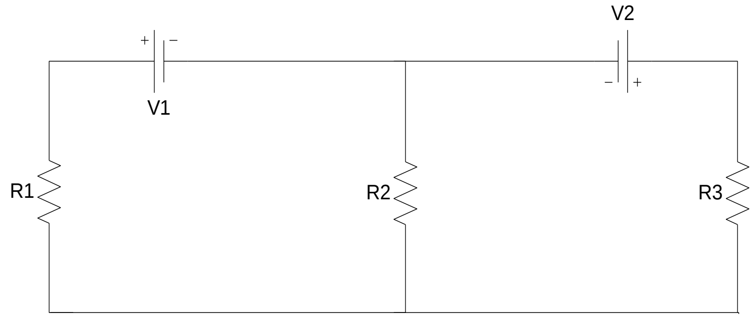
(c) $\begin{aligned} 5R_1 - 2.50R_2 + 10R_3 &= 12.50 \\ 7.5R_1 + 5R_2 - 12.5R_3 &= 0 \\ 15R_1 - 7.5R_2 + 2.5R_3 &= 10 \end{aligned}$

Selesaikan persamaan^2 ini!

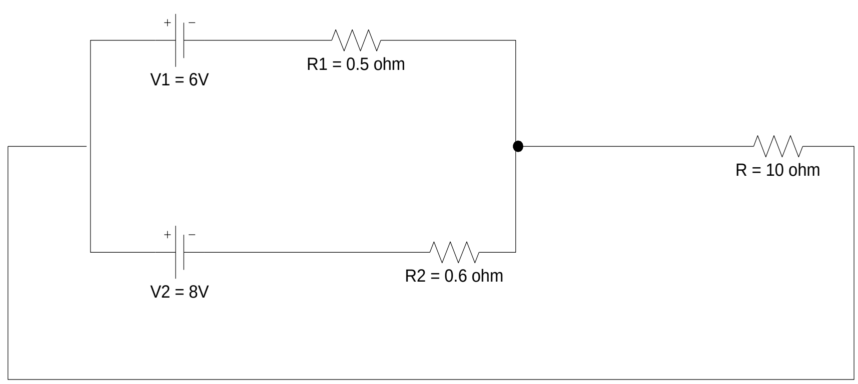
8. Pada gambar-gambar berikut, tentukan I_1, I_2, *dan* I_3.



Gambar 1.a



Gambar 1.b



Gambar 1.c

Keterangan:

(Gb.1.a) v_1 = 7 volt, v_2 = 10 volt, dan R_1 = 0.1 ohm, R_2 = 0.3 ohm, R_3 = 0.5 ohm

(Gb 1.b) v_1= 3 volt, v_2= 5 volt, dan R_1 = 0.25 ohm, R_2 = 0.50 ohm, R_3 = 0.75 ohm

(Gb 1.c) v_1= 6 volt, v_2= 8 volt, dan r_1 = 0.5 ohm, r_2 = 0.6 ohm, R = 10 ohm

BAB 2
DETERMINAN

Materi Pembelajaran

2.1 Pendahuluan,

2.2 Determinan Order Dua dan Order Tiga,

2.3 Determinan Order n,

2.4 Sifat-sifat Determinan,

2.5 Penyelesaian Persamaan Linear Tidak Homogen dengan Metode *Cramer*.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini Mahasiswa diharapkan mampu:

- Memahami pengertian determinan,
- Menerapkan konsep-konsep determinan untuk menyelesaikan masalah-masalah keteknikan, khususnya masalah teknik listrik

2.1 Pendahuluan

Ada beberapa cara dalam menuliskan suatu suku banyak dengan ciri tertentu. Misalnya untuk menyatakan suku dua (ad - bc). Penulisan suku dua ini bisa dinyatakan sebagai sebagai:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Untuk suku enam [(ayt + bzr + cxs) - (cyr + azs + bxt)] dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix}$$

Demikian juga untuk suku banyak-suku banyak yang lain.

Pendek kata suatu suku banyak dimana pada setiap suku terdiri dari sejumlah faktor yang sama serta memenuhi beberapa aturan tertentu dapat dinyatakan sebagai suatu determinan.

Determinan pada contoh pertama terdiri dari dua baris dan dua kolom sehingga disebut determinan order 2, sedangkan pada determinan kedua terdiri dari 3 baris dan 3 kolom sehingga disebut determinan order 3.

Jika pada kedua contoh di atas nilai dari masing-masing determinan telah jelas, maka bagaimana nilai determinan order n ? Tulisan ini akan membahas nilai determinan order n dengan berbagai cara yang ada serta membahas salah satu penggunanaannya dalam menyelesaikan sistem persamaan linear.

2.2 Determinan Order Dua dan Order Tiga

a. Determinan order dua

Perhatikan suku dua (ab - cd). Penulisan suku dua ini dapat dinyatakan dengan cara lain sebagai :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} \text{ atau } \begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$$

(letak a dan b dapat dipertukarkan, demikian juga c dan d)

Bentuk

$$\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} \text{ atau } \begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$$

itulah yang disebut sebagai determinan yang menggambarkan suku dua (ab - cd).

Pada determinan I, tersebut kita lihat:

a terletak pada baris 1, kolom 1 dan ditulis sebagai a_{11}

c terletak pada baris 1, kolom 2 dan ditulis sebagai a_{12}

d terletak pada baris 2, kolom 1 dan ditulis sebagai a_{21}

b terletak pada baris 2, kolom 2 dan ditulis sebagai a_{22}

Sehingga secara umum determinan di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinan ini mempunyai dua baris dan dua kolom sehingga disebut sebagai determinan *order* 2 atau determinan bertingkat 2. Dari penulisan secara umum tersebut terlihat bahwa setiap elemen mempunyai dua indeks (subskrip). Indeks pertama menunjukkan letak baris, sedangkan indeks kedua menunjukkan letak kolom.

Contoh 2.2a

Hitung dan selesaikan determinan berikut!

a. A = $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$, b. $\begin{vmatrix} a & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$ c. $\begin{vmatrix} 2x & x \\ 10 & x \end{vmatrix} = -12$

Penyelesaian:

a. A = $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ = 3.5 – (–2)7 = 15 + 14 =29,

b. $\begin{vmatrix} a & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2a - (-5)3 = 2a + 15$

Sehingga 2a + 15 = 5

2a = 5 – 15 = – 10

Jadi a = – 5

c. $\begin{vmatrix} 2x & x \\ 10 & x \end{vmatrix} = 2x^2 - 10x$

Sehingga $2x^2 - 10x = -12$

$2x^2 - 10x + 12 = 0$

$2(x^2 - 5x + 6) = 0$

$2(x - 2)(x - 3) = 0$

Jadi $x = 2$ atau $x = 3$

b. Determinan order tiga

Perhatikan determinan order 3

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Harga determinan order 3 ini dapat dihitung menggunakan cara *Sarrus* sebagai berikut

Tuliskan dua kolom pertama sehingga menjadi

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Catatan: Cara Sarrus hanya dapat digunakan untuk menghitung determinan tingkat 3

Contoh 2.2b

Hitunglah determinan $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

<u>Penyelesaian:</u>

Dengan menggunakan metode sarrus seperti di atas didapat

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$= \{1.4.3 + (3.5. -4) + 2.0.0\} - \{ (2.4. -4) + 1.5.0 + 3.0.3\}$

$= \{12 - 60 + 0\} - \{ -32 + 0 + 0\} \quad = \quad -48 + 32 = -16$

Latihan 2.2

1. Tentukan nilai-nilai determinan berikut ini!

   a. $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$ b. $B = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$ c. $C = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$ d. $D = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

2. Tentukan nilai *x*, jika:

a. $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 3$ b. $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8$ c. $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2x & 4 \end{vmatrix} = 16$ d. $\begin{vmatrix} 5 & 3x \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3$

3. Selesaikan!

a. $\begin{vmatrix} 5 & 3x \\ 2 & x \end{vmatrix} = 3$ b. $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2x & 3 \end{vmatrix} = 10$ c. $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2x & x \end{vmatrix} = 14$ d. $\begin{vmatrix} 5x & x \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 34$

4. Selesaikan!

a. $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 2 & x \end{vmatrix} = -8$ b. $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2x & 3x \end{vmatrix} = 0$ c. $\begin{vmatrix} -5 & x \\ 2x & x \end{vmatrix} = 3$ d. $\begin{vmatrix} x & x \\ -7 & x \end{vmatrix} = -10$

5. Hitunglah nilai determinan berikut!

a. $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & -9 \end{vmatrix}$ b. $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & -4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ c. $C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ -5 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

6. Hitunglah nilai determinan berikut!

a. $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & -9 \end{vmatrix}$ b. $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ c. $C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Kesimpulan apakah yang bisa Anda peroleh?

7. Hitunglah nilai determinan berikut!

a. $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -9 \end{vmatrix}$ b. $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ c. $C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

Kesimpulan apakah yang bisa Anda peroleh?

8. Hitunglah!

a. $P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ b. $Q = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 6 & 4 \\ 5 & 10 & 15 \end{vmatrix}$ c. $R = \begin{vmatrix} 11 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 30 \end{vmatrix}$

Apa yang dapat anda simpulkan dari ketiga determinan ini?

9. Hitunglah nilai determinan berikut!

a. $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 5 & 10 & -9 \end{vmatrix}$ b. $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 15 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ c. $C = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 4 \\ -7 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & -2\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

Apa yang dapat anda simpulkan dari ketiga determinan ini?

10. Hitunglah nilai determinan berikut!

a. $A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ b. $B = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 8 & -1 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ c. $C = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \\ -8 & -4 & 4 \end{vmatrix}$

Apa yang dapat anda simpulkan dari ketiga determinan-determinan tersebut?

11. Hitunglah nilai x, jika:

a. $\begin{vmatrix} x & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 10$ b. $\begin{vmatrix} x & 2x & 5 \\ 5 & -4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 15$ c. $\begin{vmatrix} x & 3 & 5 \\ -x & 4 & 7 \\ 5x & 7 & 8 \end{vmatrix} = 20$

12. Hitunglah nilai x, jika:

a. $\begin{vmatrix} x & 2 & 5 \\ 3 & 4 & x \\ 5 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 0$ b. $\begin{vmatrix} x & 2x & 5 \\ 5 & -4 & 7 \\ 3x & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$ c. $\begin{vmatrix} x & 3 & 5 \\ -x & 4 & x \\ 5x & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$

2.3 Determinan Order n

Dari contoh-contoh di atas, terlihat bahwa determinan order 2 merupakan suku dua. Artinya terdapat dua suku yang masing-masing sukunya terdiri atas dua faktor. Sedangkan determinan order 3 merupakan suku banyak terdiri atas 6 suku dan masing-masing suku terdiri atas 3 faktor.

Bagaimana halnya dengan determinan order 4, order 5 dan seterusnya? Uraian berikut akan menerangkan bagaimana menghitung determinan order n.

Pandang determinan order n berikut ini

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n} & - & - & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ .... (2)}$$

Salah satu cara menghitung determinan ini adalah menggunakan metode ekspansi. Dalam pembahasan metode ini dimulai dengan pengertian minor dan kofaktor melalui peragaan determinan order 3.

$$\text{Misalkan } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ .... (3).}$$

a. Minor

Determinan (3) di atas mempunyai 9 minor, yang selanjutnya kita notasikan sebagai M_{ij} (i: 1, 2, 3 dan j: 1, 2, 3).

Minor dari a_{11} ditulis sebagai M_{11}

Minor dari a_{12} ditulis sebagai M_{12}

-

-

Minor dari a_{33} ditulis sebagai M_{33}

dimana:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

dan seterusnya hingga M_{33} dengan $M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

b. Kofaktor

Kofaktor dari a_{ij} yang dinotasikan sebagai K_{ij} didefinisikan sebagai $\mathbf{K_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}}$

Selanjutnya perhitungan determinan dapat dilakukan dengan 2 cara, yakni ekspansi baris atau kolom.

Menghitung Determinan dengan Metode Ekspansi

a. Ekspansi Baris Melalui Kolom Tertentu

Determinan dengan ekspansi baris diperoleh dari penjumlahan dari perkalian setiap elemen suatu kolom dengan masing-masing kofaktornya. Dengan rumus dapat dituliskan sebagai:

$D = \sum_{i} a_{ik} K_{ik}$, untuk suatu kolom ke- k

b. Ekspansi Kolom Melalui Baris Tertentu

Determinan dengan ekspansi kolom diperoleh dari penjumlahan dari perkalian setiap elemen suatu baris dengan masing-masing kofaktornya. Dengan rumus dapat dituliskan sebagai:

$D = \sum_{j} a_{bj} K_{bj}$, untuk suatu baris ke- b

Contoh 2.3.1

Hitunglah determinan D di bawah ini dengan ekspansi kolom melalui baris ke 2

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Penyelesaian:

Ekspansi kolom melalui baris ke 2, jadi k = 2.

Rumus **D =** $\sum_{j=1}^{3} a_{2j} K_{2j}$ **;**

Dengan $a_{21} = 2$; $a_{22} = 3$ dan $a_{23} = 1$

- $M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$

Sehingga $K_{21} = (-1)^3 M_{21} = 20$

- $M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 15 = -17$

Sehingga $K_{22} = (-1)^4 M_{22} = -17$

- $M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4$

Sehingga $K_{23} = (-1)^5 M_{23} = 4$

Jadi D $= \sum_{j=1}^{3} a_{2j} K_{2j}$

$= a_{21}K_{21} + a_{22} K_{22} + a_{23}K_{23}$

$= 2(20) + 3(-17) + 1(4) = 40 - 51 + 4 = -7$

Contoh 2.3.2 Hitunglah determinan *A* dengan ekspansi baris melalui kolom ke 3

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

Penyelesaian:

Ekspansi baris melalui kolom ke 3, jadi k = 3

Rumus $A = \sum_{i=1}^{4} a_{i3} K_{i3}$.

Identifikasi $a_{ij;}$ diperoleh $a_{13} = 5$, $a_{23} = 0$; $a_{33} = -3$ dan $a_{43} = 7$.

Selanjutnya minor dari masing-masing elemen adalah:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -48;\; M_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -64;\; M_{43} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 32$$

Sehingga $K_{13} = -48$; $K_{33} = -64$, dan $K_{43} = -32$

Jadi A $= a_{13} K_{13} + a_{23} K_{23} + a_{33} K_{33} + a_{43} K_{43}$

$= 5(-48) + 0.K_{23} - 3(-64) + 7(-32)$

$= -240 + 0 + 192 - 224 = -272$

2.4 Sifat-sifat Determinan

Masih ingatkah Anda dengan kesimpulan Latihan 2.2, soal nomor 6, 7, 8 dan 10? Berikut ini adalah beberapa sifat yang sesuai dengan soal nomor 6, 7, 8 dan 10 tersebut. Sifat-sifat ini dapat membantu kita mempermudah menghitung nilai suatu determinan khususnya sifat (e).

Sifat-sifat:

a) Suatu determinan berharga 0 (nol) jika setiap elemen dari suatu baris atau kolom adalah 0 (nol)

$$\begin{vmatrix} a & p & 0 \\ b & q & 0 \\ c & r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

b) Jika setiap elemen dari suatu baris atau kolom suatu determinan dikalikan dengan k, maka nilai determinan yang baru dikalikan dengan k

Jika $D_1 = \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$, dan $D_2 = \begin{vmatrix} a & kp & x \\ b & kq & y \\ c & kr & z \end{vmatrix}$, maka $D_2 = kD_1$

c) Jika dua buah baris atau kolom dari suatu determinan yang berdampingan ditukar, maka nilai determinan yang baru adalah negatif determinan semula.

$$\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} p & a & x \\ q & b & y \\ r & c & z \end{vmatrix}$$

d) Jika dua buah baris atau kolom suatu determinan adalah identik (sebanding), maka nilai determinan adalah nol (0).

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0 \text{ atau } \begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & p & a \\ b & q & b \\ c & r & c \end{vmatrix} = 0 \text{ atau } \begin{vmatrix} a & p & ka \\ b & q & kb \\ c & r & kc \end{vmatrix} = 0$$

e) Nilai sebuah determinan tidak berubah jika elemen-elemen suatu baris atau kolom ditambah dengan k kali elemen-elemen suatu baris atau kolom lain yang seletak.

$$\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & p & (x+ka) \\ b & q & (y+kb) \\ c & r & (z+kc) \end{vmatrix}$$

Contoh 2.4

Dengan menggunakan sifat-sifat determinan terlebih dahulu, hitunglah

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

Penyelesaian:

Untuk mempermudah perhitungan, kita usahakan elemen-elemen dari suatu baris atau kolom (a_{ij}) terekspansi bernilai 0, kecuali elemen yang terletak pada baris/ kolom kunci. Untuk itu kita gunakan sifat e untuk membuat elemen-elemen menjadi nol (0).

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

Nolkan baris ke-2 dengan kunci kolom ke-2 (untuk selanjutnya kolom ke-2 disebut kolom kunci) dan notasikan sebagai K_2.

Sehingga determinan di atas menjadi

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -8 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & -4 \\ 6 & -1 & 7 & 8 \end{vmatrix} \\ K_1^1 \quad K_2^1 \quad K_3^1 \quad K_4^1 \end{array}$$

Keterangan:

$K_1^1 = K_1 - 2K_2$; $K_2^1 = K_2$ (sebagai kolom kunci K_2 tetap);

$K_3^1 = K_3$ (K_3 tetap karena $a_{23} = 0$) dan $K_4^1 = K_4 - 3K_2$

Dengan melakukan ekspansi lewat baris ke-2 (k = 2), yaitu $A = \sum_{j=1}^{4} a_{2j} K_{2j}$

Didapat: $A = 0.K_{21} + 1.K_{22} + 0.K_{23} + 0.K_{24} = K_{22}$

Padahal $K_{22} = (-1)^4 M_{22} = M_{22}$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -8 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & -4 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 5 & 0 & -8 & 5 \\ 3 & -3 & -4 & 3 & -3 \\ 6 & 7 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$= (192 - 120 - 0) - (0 + 224 + 120)$

$= -32 - 240 = -272$

(Coba bandingkan hasilnya dengan contoh 2.3.2, samakah hasilnya?)

2.5 Penyelesaian Persamaan Linear Tidak Homogen dengan Metode *Cramer*

Perhatikan n persamaan linear dalam n variabel $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = h_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = h_2$

……………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………..

$a_{n1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = h_n$

dengan koefisien-koefisien a_{ij} dan h_i ada dalam sistem F.

Suatu penyelesaian (solusi) dalam F diartikan sebagai sembarang himpunan nilai-nilai $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ dalam F yang secara serentak memenuhi n persamaan tersebut. Suatu sistem dikatakan konsisten jika memiliki penyelesaian dan dikatakan tidak konsisten jika tidak memiliki penyelesaian. Suatu sistem yang mempunyai penyelesaian mempunyai satu atau tak berhingga banyak penyelesaian. Dalam tulisan ini hanya akan dibahas suatu sistem yang hanya memiliki satu penyelesaian.

Definisi

Suatu persamaan linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_nx_n = h$ disebut tak homogen jika h $\neq$ 0. Selanjutnya sistem persamaaan linear $\boldsymbol{AX = H}$ disebut persamaan tak homogen, jika $\boldsymbol{H \neq 0}$ (H bukan vektor nol)

Terdapat beberapa cara untuk mencari penyelesaian sistem persamaan linear $\boldsymbol{AX = H}$, diantaranya menggunakan metode invers matriks dan metode *Cramer*.

Ada pun dengan metode *Cramer* nilai x_1, x_2 $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ dicari sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n = \frac{D_n}{D}$$

Dengan

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & - & - & a_{nn} \end{vmatrix}; \qquad D_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & - & - & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ h_n & a_{n2} & - & - & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & h_2 & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & h_n & - & - & a_{nn} \end{vmatrix}; \ldots\ldots \qquad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & - & - & h_2 \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & - & - & h_n \end{vmatrix}$$

Contoh 2.5

Tentukan nilai x , y, u dan v pada persamaan linear berikut ini:

$2x + y + 5u + v = 5$

$x + y - 3u - 4v = -1$

$3x + 6y - 2u + v = 8$

$2x + 2y + 2u - 3v = 2$

Penyelesaian:

Dengan perhitungan minor/kofaktor seperti pembicaraan sebelumnya diperoleh:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -120\,;$$

Gantilah kolom pertama dengan koefisien hasil (*H*). Sehingga diperoleh

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -240$$

Gantilah kolom kedua dengan koefisien hasil (*H*). Sehingga diperoleh

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24$$

Gantilah kolom ketiga dengan koefisien hasil (*H*). Sehingga diperoleh

$$D_u = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Gantilah kolom keempat dengan koefisien hasil (*H*). Sehingga diperoleh

$$D_v = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -96$$

Jadi

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-240}{-120} = 2;\, y = \frac{D_y}{D} = \frac{-24}{-120} = 0{,}20;\, u = \frac{D_u}{D} = \frac{0}{-120} = 0;\, v = \frac{D_v}{D} = \frac{-96}{-120} = 0{,}80$$

Latihan 2.5

1. Tuliskan bentuk determinan dari suku dua

   a. *(pq – rs)*,

   b. *5x + 3y*,

   c. *10x – y*^{2},

   d. *x*^{2} *+ 4y*

2. Hitunglah nilai determinan dari

   a. $\begin{vmatrix} x & 3x \\ -2 & x \end{vmatrix} = 8$ b. $\begin{vmatrix} 3 & -x \\ 2x & -x \end{vmatrix} = 5$ c. $\begin{vmatrix} 2x & x \\ -2 & x \end{vmatrix} = 4$ d. $\begin{vmatrix} 2x & x \\ -5 & x \end{vmatrix} = -6$

3. Dengan metode sarrus hitunglah determinan berikut ini!

   (a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 3 & 7 & -5 \\ -5 & 9 & 3 \end{vmatrix}$, (c) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 5 & 7 & -1 \\ -7 & 3 & 9 \end{vmatrix}$,

   (d) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -8 \\ -3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$, (e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 8 & 12 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, (f) $\begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 8 & 12 & -4 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$,

   (g) $\begin{vmatrix} 10 & -5 & 15 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & -5 & 3 \end{vmatrix}$, (h) $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 8 & 12 & -4 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, (i) $\begin{vmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 8 & 12 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$,

   (j) $\begin{vmatrix} 15 & -10 & 5 \\ 3 & 3 & -6 \\ -6 & -5 & 3 \end{vmatrix}$, (k) $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 8 & 12 & -4 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, (l) $\begin{vmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 8 & 12 & -4 \\ -4 & -9 & 2 \end{vmatrix}$,

4. Dengan metode ekspansi, hitunglah!

   (a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ -2 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 & 7 \\ -1 & 10 & -7 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} 9 & -3 & 0 & -5 \\ -2 & 4 & 10 & 9 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, (d) $\begin{vmatrix} -4 & -5 & 4 & 8 \\ -1 & 10 & -7 & 9 \\ 2 & 5 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$,

5. Dengan menerapkan sifat-sifat determinan terlebih dahulu (sifat b) lanjutkan soal-soal berikut ini!

(a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \\ 6 & -3 & 10 & -6 \end{vmatrix} = (2)(5)(3)\begin{vmatrix} \text{--} & 3 & \text{--} & \text{--} \\ \text{--} & -1 & \text{--} & \text{--} \\ \text{--} & 1 & \text{--} & \text{--} \\ \text{--} & -3 & \text{--} & \text{--} \end{vmatrix} = \ldots.$

(b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 10 & 15 \\ 6 & -2 & 10 & -6 \end{vmatrix} = (2)(5)(3)\begin{vmatrix} \text{--} & 3 & \text{--} & \text{--} \\ \text{--} & -1 & \text{--} & \text{--} \\ \text{--} & -5 & \text{--} & \text{--} \\ \text{--} & -2 & \text{--} & \text{--} \end{vmatrix} = \ldots$

(c) $\begin{vmatrix} -6 & 9 & -12 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 4 & 6 & -6 & 9 \\ 6 & -3 & 6 & -6 \end{vmatrix} = (3)(2)(3)\begin{vmatrix} \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \\ \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \end{vmatrix} = \ldots$

(d) $\begin{vmatrix} -4 & -12 & 4 & 8 \\ 4 & 10 & -2 & 4 \\ 2 & 15 & 4 & -8 \\ 15 & 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = (4)(2)(5)\begin{vmatrix} \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \\ \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \\ 2 & 15 & 4 & -8 \\ \text{--} & \text{--} & \text{--} & \text{--} \end{vmatrix} = \ldots$

6. Dengan menerapkan sifat-sifat determinan terlebih dahulu (sifat e) lanjutkan soal-soal berikut ini!

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & \text{--} & \text{--} & -2 \\ 0 & \text{--} & \text{--} & \text{--} \\ 0 & \text{--} & \text{--} & \text{--} \end{vmatrix} = \ldots$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & - & - & - \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & - & - & - \\ 0 & - & - & - \end{vmatrix} = \ldots$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ - & 3 & - & - \\ - & 4 & - & - \\ - & -3 & - & - \end{vmatrix} = \ldots$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & - & - & - \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & - & - \\ 2 & - & - & - \end{vmatrix} = \ldots$

7. Dengan metode Cramer selesaikan persamaan-persamaan linear berikut ini!

(a) $\begin{aligned} 2x + y &= 9 \\ x - y - z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 3 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 2x - 3z &= -11 \\ x + 2y - z &= -22 \\ -x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 3x - y - 2z &= 1 \\ y + 3z &= 7 \\ -2x + y + z &= -2 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} a + b + c &= 6 \\ 2a + b - c &= 1 \\ a - 5b - c &= -12 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} 3a - 2b - c &= 2 \\ -2a + 3b + c &= 2 \\ a + 2b - 3c &= 22 \end{aligned}$

(f) $\begin{aligned} a + 2b - 3c &= -8 \\ -2a + 3b + c &= 6 \\ 3a - b + 2c &= -2 \end{aligned}$

(g) $\begin{aligned} 2i_1 + i_2 + i_3 &= 1.5 \\ 3i_1 + 4.5\, i_2 - 1.5\, i_3 &= 3.0 \\ 2.25 i_1 + 1.5\, i_2 + 5.25\, i_3 &= 0.75 \end{aligned}$

(h) $\begin{aligned} 3.6\, V_1 + 2.4\, V_2 + 4.8\, V_3 &= 1.2 \\ 1.3 V_1 - 3.9\, V_2 - 6.5\, V_3 &= 2.6 \\ 11.9\, V_1 + 1.7\, V_2 + 8.5\, V_3 &= 0 \end{aligned}$

8. Fungsi parabola dalam x mengikuti persamaan $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Tentukan fungsi tersebut jika parabola:

a. melalui titik-titik: (–1, 2); (1, 6); dan (2, 7),

b. melalui titik-titik: (–1, 22); (1, 2); dan (3, 0),

c. melalui titik-titik: (–1, 4); (1, 8); dan (2, 13),

9. Arus-arus listrik I_1, I_2 , dan I_3 mengikuti persamaan

$$7I_1 - 2.5I_2 - 3I_3 = 5$$
$$-5I_1 + 14I_2 - 2I_3 = 3$$
$$-3I_1 - I_2 + 9I_3 = 2.5$$

Selesaikan persamaan ini melalui metode Cramer

10. Dalam suatu rangkaian listrik tegangan-tegangannya (V_1, V_2, V_3 dan V4) memenuhi persamaan linear sebagai berikut.

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 10$$
$$2V_1 - V_2 + 3V_3 - V_4 = 5$$
$$3V_1 + 2V_2 - V_3 + 4V_4 = 20$$
$$4V_1 + 3V_2 - V_3 + V_4 = 11$$

Dengan metode Cramer tentukan:

(a) V_1 dan V_3

(b) V_2 dan V_4

11. Diberikan persamaan linear sebagai berikut ini

$$4R_1 - 3R_2 + 2R_3 + R_4 = 4$$
$$3R_1 + 2R_2 - R_3 + 2R_4 = 6$$
$$2R_1 + R_2 + 3R_3 - 2R_4 = 5$$
$$R_1 - 4R_2 + 3R_3 - 2R_4 = -2$$

Dengan metode Cramer tentukan:

(a) R_1 dan R_3

(b) R_2 dan R_4

12. Dalam suatu rangkaian listrik arus-arus yang mengalir padanya memenuhi persamaan linear

$$I_1 + 2I_2 + I_3 - I_4 = -3$$
$$I_1 + I_2 - 2I_3 + I_4 = -1,5$$
$$I_1 - I_2 + I_3 + 2I_4 = 3$$
$$-2I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 1,5$$

Dengan metode Cramer tentukan:

(a) I_1 dan I_3

(b) I_2 dan I_4

13. Jika R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah tahanan-tahanan yang ada dalam suatu rangkaian listrik dan memenuhi persamaan linear

$$
\begin{aligned}
R_1 - 2R_2 + R_3 - R_4 &= -0{,}25 \\
2R_1 + R_2 - 2R_3 + R_4 &= 0{,}75 \\
-2R_1 + R_2 - 4R_3 + 2R_4 &= 1{,}75 \\
3R_1 - 4R_2 - R_3 + R_4 &= 0{,}75
\end{aligned}
$$

Dengan metode Cramer tentukan:

(a) R_1 dan R_3

(b) R_2 dan R_4

BAB 3

MATRIKS

Materi Pembelajaran

3.1 Pendahuluan,

3.2 Pengertian Matriks

3.3 Beberapa Jenis Matriks,

3.4 Operasi Penjumlahan dan Perkalian,

3.5 Sifat-sifat,

3.6 Invers Matriks Bujur Sangkar.

3.7 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Invers Matriks

Gambar 3.1

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini Mahasiswa diharapkan mampu:

- Memahami pengertian matriks,
- Menerapkan konsep-konsep matriks untuk menyelesaikan masalah-masalah keteknikan, khususnya masalah teknik listrik

3.1 Pendahuluan

Ada banyak cara dalam menuliskan sebuah model, baik dalam masalah-masalah sosial maupun dalam masalah-masalah eksak. Sebagai misal, bagaimana suatu cabang Perusahaan Listrik Negara (PLN) dapat menampilkan data pelanggan yang menunggak dari empat kecamatan pada semester pertama tahun tertentu. Serta bagaimana cara menghitung dengan cepat jumlah tagihan pada wilayah tersebut, sehingga disamping dapat dihitung dengan cepat, penyajian hitungan dapat dilihat lebih informative (tabel 3.1)

Tabel 3.1 Banyaknya penunggak rekening listrik pada semester pertama tahun 2011.

Kecamatan	**Bulan**					
	Januari	Pebruari	Maret	April	Mei	Juni
Sukun	57	51	49	56	52	50
Blimbing	46	47	45	49	48	47
Klojen	40	50	47	51	49	52
Lowokwaru	59	54	57	58	57	58

Teladan yang lain adalah bagaimana seseorang dapat menentukan dua buah titik dalam ruang terletak pada satu garis lurus yang melalui titik pangkal. Serta masih banyak teladan yang lain, dimana penampilan data dan perhitungannya dapat dilakukan menggunakan matriks.

Tulisan ini akan membahas pengertian matriks, jenis-jenisnya, beberapa operasi serta salah satu aplikasinya dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan linear tak homogen dalam n variable.

3.2 Pengertian Matriks

Sekumpulan unsur (elemen) berbentuk segi empat yang diapit oleh sepasang tanda kurung serta tunduk pada beberapa aturan tertentu disebut *matriks.*

Contoh:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

c) $T = \begin{bmatrix} 57 & 51 & 49 & 56 & 52 & 50 \\ 46 & 47 & 45 & 49 & 48 & 47 \\ 40 & 50 & 47 & 51 & 49 & 52 \\ 59 & 54 & 57 & 58 & 57 & 58 \end{bmatrix}$

Matriks ***A*** boleh jadi merupakan matriks koefisien sistem persamaan linear

$$3x - y + 5z = 0$$

$$2x + 4y + 3z = 0$$

matriks ***B*** dapat ditafsirkan sebagai penyajian tiga buah titik dalam ruang dengan koordinat (1, 3, 3); (2, 2, 4) dan (4, 5, 2). Sedangkan matriks ***T*** boleh jadi merupakan matriks yang menyajikan banyaknya penunggak rekening listrik dari lima kecamatan: Sukun, Blimbing, Klojen, dan Lowokwaru pada semester pertama tahun 2011 sebagaimana ditampilkan pada table 3.1

Nanti akan dapat dilihat bagaimana matriks dapat berperan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear (matriks a). Sedangkan terhadap matriks b) dapat dilihat apakah ketiga titik tersebut terletak pada garis lurus ataukah tidak.

Dalam suatu matriks, unsur-unsur yang terletak secara mendatar membentuk baris. Sedangkan unsur-unsur yang terletak secara vertikal membentuk kolom. Matriks ***A*** yang mempunyai m baris dan n kolom ditulis sebagai $\boldsymbol{A_{mxn}}$ (atau ditulis dengan ***A*** saja) Jika unsur-unsur dalam ***A*** dinyatakan sebagai a_{ij}, i = 1, 2, ………..m dan j = 1, 2, ……….n maka ***A*** dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{n2} & - & - & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.1)}$$

Untuk memudahkan penulisan selanjutnya matriks ***A*** ini ditulis dalam notasi "***A*** = [a_{ij}], mxn" (Dibaca: matrisk *A* terdiri dari m baris dan n kolom)

i berjalan dari 1, 2 ………… m dan

j berjalan dari 1, 2 ………… n

3.3 Beberapa Jenis Matriks

a. Matriks bujur sangkar

Apabila banyaknya baris dan kolom suatu matriks adalah sama (m = n), maka matriks tersebut disebut matriks bujur sangkar. Dalam suatu matriks bujur sangkar elemen-elemen a_{11}, a_{22}, ……………………………, a_{nn} membentuk diagonal utama. Sehingga elemen-elemen tersebut disebut sebagai elemen diagonal. Selanjutnya jumlah dari elemen-elemen diagonal matriks *A* disebut sebagai *trace A*.

b. Matriks segi tiga atas

Suatu matriks bujur sangkar yang memenuhi sifat a_{ij} = 0, jika i > j disebut sebagai matriks segi tiga atas. Secara umum matriks tersebut dapat digambarkan sebagai

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & - & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & - & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & - & a_{3n} \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.2)$$

c. Matriks segi tiga bawah

Suatu matriks bujur sangkar yang memenuhi sifat a_{ij} = 0, jika i < j disebut sebagai matriks segi tiga bawah. Secara umum matriks tersebut dapat digambarkan sebagai

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & - & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & - & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & - & 0 \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & - & - & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.3)$$

d. Matriks diagonal

Suatu matriks bujur sangkar yang memenuhi sifat $a_{ij} = 0$, jika $i \neq j$ disebut sebagai matriks diagonal. Secara umum matriks tersebut dapat digambarkan sebagai

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & - & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ .... (3.4)}$$

e. Matriks satuan

Matriks satuan adalah matriks diagonal yang memenuhi sifat $a_{ij} = 1$. Matrisk ini biasa diberi notasi sebagai I_n (identitas), karena pada kenyataannya matriks satuan ini merupakan matriks identitas terhadap operasi perkalian.

Sebagai contoh, untuk menunjukkan matriks satuan matriks peringkat 2 ditulis I_2, sedangkan untuk menunjukkan matriks satuan peringkat 3 ditunjukkan oleh I_3 . Jadi

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ....(3.5)}$$

f. Matriks balikan (invers)

Jika ***A*** dan ***B*** adalah matriks-matriks bujur sangkar sedemikian sehingga berlaku ***A.B = B.A = I***, maka ***B*** disebut balikan dari ***A***. Sebaliknya ***A*** disebut sebagai balikan dari ***B.*** Pada pembicaraan selanjutnya, tulisan ini lebih sering menyebut dengan invers.

g. Matriks transpos

Jika ***A*** adalah matriks berperingkat mxn, maka transpos dari *A* yang dinotasikan sebagai $\boldsymbol{A}^T$ adalah suatu matriks yang dibentuk dengan meletakkan baris-baris dari ***A*** menjadi kolom-kolom matriks transpos tersebut. Sebagai contoh, jika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \text{maka } A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat disimpulkan, jika ***A*** berperingkat mxn, maka $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ berperingkat nxm.

h. Matriks simetri

Suatu matriks bujur sangkar yang memenuhi sifat $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$,disebut simetri. Jadi matriks tersebut adalah simetri jika $a_{ij} = a_{ji}$. Sebagai contoh

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \text{ matriks ini adalah simetri.}$$

Selidikilah apakah jika ***A*** simetri, ***kA*** juga simetri?

i. Matriks konjugat

Jika a dan b adalah bilangan-bilangan real dan i = √-1, maka z = a + bi disebut sebagai bilangan kompleks. Konjugat dari z yang dalam tulisan ini dinotasikan sebagai z_k adalah z_k = a - bi. Sehingga konjugat dari z_k adalah z.

Selanjutnya jika elemen-elemen dari matriks ***A*** adalah kompleks, maka matriks konjugat dari ***A*** adalah suatu matriks yang diperoleh dari ***A*** dengan mengganti elemen-elemen konjugat-nya.

Sebagai contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & i \\ 4 & 5-2i \end{bmatrix}, \text{ maka } A_k = \begin{bmatrix} 2-3i & -i \\ 4 & 5+2i \end{bmatrix}$$

j. Matriks Hermit

Matriks bujur sangkar ***A*** = $[a_{ij}]$ sedemikian sehingga memenuhi $\boldsymbol{A_k}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}$ disebut Hermit. Jadi ***A*** Hermit jika $a_{ij} = (a_{ji})_k$.

Sebagai contoh adalah matriks

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 1-2i & -3 \\ 1+2i & 2 & 2i \\ -3 & -2i & 5 \end{bmatrix}$$

3.4 Operasi Penjumlahan dan Perkalian

a. Operasi penjumlahan

Jika ***A*** = [a_{ij}], dan ***B*** = [b_{ij}] adalah dua buah matriks berperingkat mxn, maka hasil jumlah (selisih) kedua matriks tersebut ***(A±B)*** didefinisikan sebagai matriks ***C*** = [c_{ij}] sedemikian sehingga $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$. Sebagai contoh adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2-4 & -3+3 \\ 5+2 & -3+1 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

<u>Sifat-sifat:</u>

Dengan mengasumsikan ***A, B*** dan ***C*** adalah tiga buah matriks yang aditif (dapat dijumlahkan), maka berlaku:

a) ***A + B = B + A***

b) ***A + (B + C) = (A + B) + C***

c) ***k(A + B) = kA + kB***, untuk suatu skalar k

d) Terdapat suatu matriks ***L*** sedemikian hingga berlaku ***A + L = B***

b. Operasi perkalian

Untuk mengawali operasi perkalian matriks berperingkat mxn dengan nxp perhatikan perkalian dua buah matriks $\boldsymbol{A}_{1xn}$ dengan $\boldsymbol{B}_{nx1}$ sebagai berikut.

Jika ***A*** = [a_{11} a_{12} - - a_{1n}], dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ - \\ - \\ b_{n1} \end{bmatrix}$

maka ***C = A.B*** adalah matriks peringkat 1x1 dengan $C = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j1}$

Perhatikan peragaan berikut ini

$$A.B = [a_{11}\ a_{12}\ \ -\ -\ \ a_{1n}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ - \\ - \\ b_{n1} \end{bmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. + a_{1m}b_{m1})$$

Jika diperhatikan perkalian tersebut adalah baris dengan kolom. Artinya setiap elemen pada baris dikalikan dengan elemen pada kolom padanannya dan kemudian hasilnya dijumlahkan.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1 + (-2).2 + 1(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}$$

Sekarang bagaimana jika matriks yang dikalikan tidak berperingkat 1x3 dan 3x1?

Dua buah matriks dapat dikalikan, katakan A.B, jika banyaknya kolom dari A sama dengan banyaknya baris dari B. Secara umum jika hasil kali dari A dan B adalah matriks C dan jika A berperingkat mxn dan B berperingkat nxp, maka C berperingkat mxp.

Jadi $\boldsymbol{A_{mxn}.B_{nxp} = C_{mxp}}$

Dalam penulisan notasi, jika $\boldsymbol{A_{mxn} = [a_{ij}]}$, $\boldsymbol{B_{nxp}} = [\boldsymbol{b_{ij}}]$ dan $\boldsymbol{C_{mxp} = [c_{ij}]}$, maka $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

, dimana i = 1, 2, …….m; j = 1, 2, …….p dan k = 1,2 , ……., n

Jadi $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. + a_{in}\, b_{nj}$

Contoh:

1. Tentukan AB dan BA, jika diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

2. Tentukan AB dan BA, jika diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

3. Tentukan PQ dan QP, jika diketahui

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

3.5 Sifat-sifat

Jika A, B, dan C adalah matriks-matriks yang dapat dikalikan, maka berlaku sifat-sifat:

a) ***A(B + C) = AB + AC*** (hukum distributif pertama)

b) ***(A + B)C = AC + BC*** (hukum distributif kedua)

c) ***A(BC) = (AB)C*** (hukum asosiatif)

akan tetapi

d) $\boldsymbol{AB \neq BA}$ (secara umum)

e) ***AB = 0*** tidak selalu berakibat ***A = 0*** atau ***B = 0***

f) ***AB = AC*** tidak selalu berakibat ***B = C***

Contoh-contoh:

Jika ***A*** dan ***B*** adalah dua buah matriks dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \text{dan } B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

tentukan a) ***B.A*** b) ***A.B***. Samakah hasilnya?

3.6 Invers Matriks Bujur Sangkar

Di depan telah disampaikan bahwa jika A dan B adalah dua buah matriks bujur sangkar dengan peringkat yang sama (katakan nxn), maka jika A.B = B.A = I, maka A merupakan invers dari B, dan B merupakan invers dari A. Untuk selanjutnya invers dari A ini dinotasikan sebagi A^{-1}, sedangkan invers dari B dinotasikan sebagai B^{-1}.

Suatu matriks bujur sangkar A dikatakan mempunyai invers jika A tak singular. Artinya determinan matriks A yang dinotasikan sebagai $|A|$ tidak nol. Dan, apabila A tak singular, maka jika AB = AC, maka B = C.

a) Adjoint matriks bujur sangkar

Pada bab II telah disampaikan pengertian tentang kofaktor elemen dari suatu determinan. Adjoint dari suatu matriks bujur sangkar (2.1) yang dinotasikan sebagai **adj A** didefinisikan sebagai

$$adj\ A = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & - & - & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & - & - & K_{n2} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ K_{1n} & K_{2n} & - & - & K_{nn} \end{bmatrix}$$

selanjutnya invers dari A yaitu A^{-1}, didefinisikan sebagai

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj.\,A$$

Contoh : Tentukan A^{-1} jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

a) Langkah pertama adalah menentukan apakah $|A|$ bernilai 0 ataukah tidak.

Dengan metode Sarrus diperoleh

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

Karena $|A| \neq 0$,maka A tak singular (mempunyai invers)

b) Menentukan adj.A

Dari perhitungan didapat bahwa

$$adj.A = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj.A = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3.7 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Invers Matriks

Perhatikan suatu sistem persamaan linear tak homogen dalam n bilangan anu sebagai berikut.

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n} x_n = h_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n} x_n = h_2$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn} x_n = h_n$

konstanta-konstanta a_{ij} dan suku tetap h_i berada dalam F.

Dalam penulisan matriks, sistem persaman linear di atas dapat dinyatakan sebagai perkalian dua buah matriks, yaitu matriks koefisien A dan matriks hasil H sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & - & - & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ - \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ - \\ - \\ h_n \end{bmatrix}$$

dengan notasi matriks dapat ditulis sebagai ***A.X = H,***

dengan $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$; $\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, - \; - \; - \; - \; x_n]^1$ dan $\boldsymbol{H} = [h_1, h_2, - \; - \; - \; h_n]^1$

Mencari himpunan penyelesaian persamaan linear di atas berarti identik mencari ***X.***

Dengan aljabar matriks diperoleh:

$$AX = H$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}H$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}H$$

$$I\,X = A^{-1}H$$

$$\boldsymbol{X = A^{-1}H}$$

Contoh:

Dengan metode invers matriks selesaikanlah sistem persamaan linear ini !

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$

Penyelesaian:

Dengan penulisan matriks sistem persamann di atas dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

atau $\boldsymbol{A} \ . \ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{H}$

Dengan metode Sarrus diperoleh

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

Oleh karena $|\mathbf{A}| \neq 0$, maka matriks koefisien ($\boldsymbol{A}$) mempunyai invers. Sehingga sistem tersebut punya penyelesaian.

Dari definisi invers, diperoleh $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adj.A = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

Jadi $X = A^{-1}.H = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{18} \\ \frac{29}{18} \\ \frac{5}{18} \end{bmatrix}$

Atau $x_1 = 35/18$; $x_2 = 29/18$; $x_3 = 5/18$.

Latihan 3

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, tentukan

a. ***A.B*** dan ***B.A***

b. ***A.A^T*** dan ***A^T.A***

c. ***B.B^T*** dan ***B^T.B***

2. Jika $P = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 10 & -5 \\ 2 & -7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$, dan $Q = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

Tentukan

a. $\boldsymbol{3P - 2Q^T}$ b. $\boldsymbol{P.Q}$ c. $\boldsymbol{Q.P}$ d. $\boldsymbol{P.P^T}$ e. $\boldsymbol{Q^T.Q}$

3.Jika $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & -5 & 3 & 0 \\ -5 & 6 & 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & -7 & 11 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 8 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan: (a) 3P (b) -2Q (c) 5R

(d) 3P – 2Q (e) 3P – 2Q + 5R

4. Untuk matriks-matriks berikut ini tentukan matriks mana yang punya invers, jika mempunyai invers tentukan inversnya!

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ b. $C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ c. $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$

d. $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ e. $Q = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ -5 & 6 & -9 \end{bmatrix}$ f. $R = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

5. Untuk persamaan-persamaan berikut ini, selesaikan melalui metode invers matriks.

(a) $3a - 2b = 5$
$-a + 3b = 7$

(b) $2x - 3y = 6$
$-3x + y = 5$

(c) $a + 2b - 3c = 5$
$2a - 3b + c = 7$
$3a + b + 2c = 10$

(d) $x + 2y - z = 5$
$-x + y + 3z = 7$
$3x - 2y + 2z = 9$

6. Selesaikan melalui 3 cara, yaitu cara invers matriks, metode cramer, dan substitusi/ eliminasi!

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -0.5 & 2.0 \\ 1.5 & -3.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 7.0 \end{bmatrix}$

7. Selesaikan melalui 3 cara, yaitu cara invers matriks, metode cramer, dan substitusi/ eliminasi!

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -7 \\ -7 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & -5 \\ 0 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 5 & 0 & -7 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -7 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 9 & -5 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$

(k) $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$

(l) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -7 \\ -7 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(m) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

(n) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -7 \\ 7 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(o) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -7 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$

(p) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -5 & 2 & -3 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(q) $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}$

(r) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

(s) $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

(t) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

(u) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$

(w) $\begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

(x) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

(y) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -9 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

(z) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

BAB 4

BILANGAN KOMPLEKS

Materi Pembelajaran

4.1 Pendahuluan

4.2 Bentuk Kartesius Bilangan Kompleks

4.3 Diagram Argand

4.4 Beberapa Operasi Bilangan Kompleks

4.5 Bentuk Polar Bilangan Kompleks

4.7 Operasi Bilangan Kompleks Bentuk Polar

4.8 Teorema *De Moivre*

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini Mahasiswa diharapkan mampu:

- Memahami pengertian Bilangan Kompleks,
- Menerapkan konsep-konsep Bilangan Kompleks untuk menyelesaikan masalah-masalah keteknikan, khususnya masalah teknik listrik

4.1 Pendahuluan

Sistem bilangan nyata (real) yang selama ini dikenal di di SLTA perlu diperluas, karena tidak mampu memuat kebutuhan di perguruan tinggi teknik, khususnya jurusan teknik elektro. Sebagai gambaran, himpunan penyelesaian dari $x^2 + 2x + 5 = 0$ adalah kosong (void set) karena harga-harga akar dari persamaan tersebut memuat bilangan $\sqrt{-1}$, yaitu $x = -1 + 2\sqrt{-1}$ atau $x = -1 - 2\sqrt{-1}$, karena $\sqrt{-1}$ tidak dikenal dalam system bilangan nyata. Oleh karena itu, semesta pembicaraan bilangan real yang selama ini telah kita pelajari bersama perlu diperluas kedalam system bilangan yang memuat $\sqrt{-1}$, yaitu himpunan bilangan kompleks agar penyelesaian dari persamaan seperti teladan di atas tidak kosong. Selain itu banyak permasalahan-persalahan kelistrikan yang menggunakan konsep-konsep bilangan kompleks dan operasi-operasinya.

Tulisan ini akan membahas pengertian bilangan kompleks, berbagai operasi, konversi bilangan kompleks bentuk Kartesius dalam bentuk polar dan operasi-operasinya.

4.2 Bentuk Kartesius Bilangan Kompleks

Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan real dan j = $\sqrt{-1}$. Suatu bilangan kompleks yang biasa dinyatakan dengan huruf z didefinisikan sebagai z = a + bi atau z = a + bj.

a disebut sebagai bagian real dan b disebut sebagai bagian imajiner.

z = a + bj, inilah yang disebut bentuk kartesius.

Contoh 4.2 Tentukan penyelesaian dari persamaan $x^2 - 2x + 5 = 0$

Penyelesaian:

Rumus $$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Diperoleh $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1.5) = -16$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{(-16)}}{2.1} = \frac{2 + \sqrt{16(-1)}}{2} = \frac{2 + 4\sqrt{(-1)}}{2} = \frac{2 + 4j}{2} = 1 + 2j$$

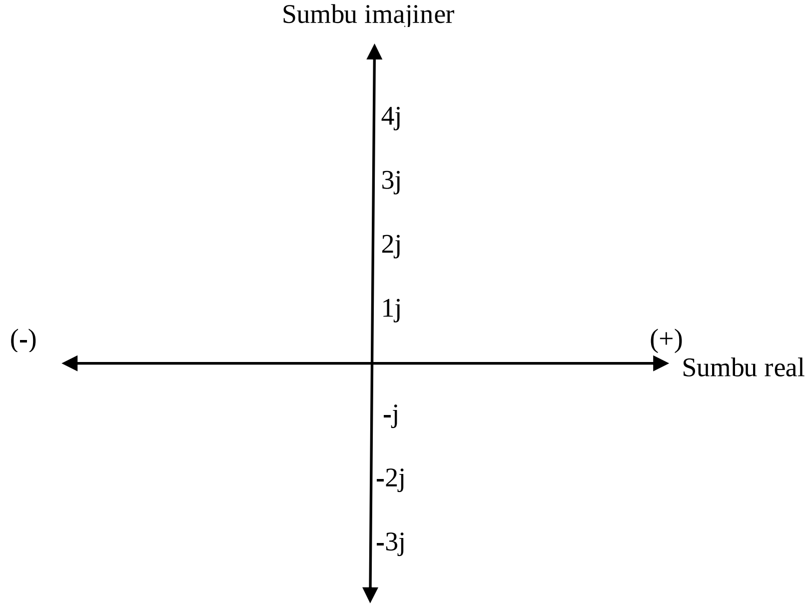
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{(-16)}}{2.1} = \frac{2 - \sqrt{16(-1)}}{2} = \frac{2 - 4\sqrt{(-1)}}{2} = \frac{2 - 4j}{2} = 1 - 2j$$

4.3 Diagram Argand

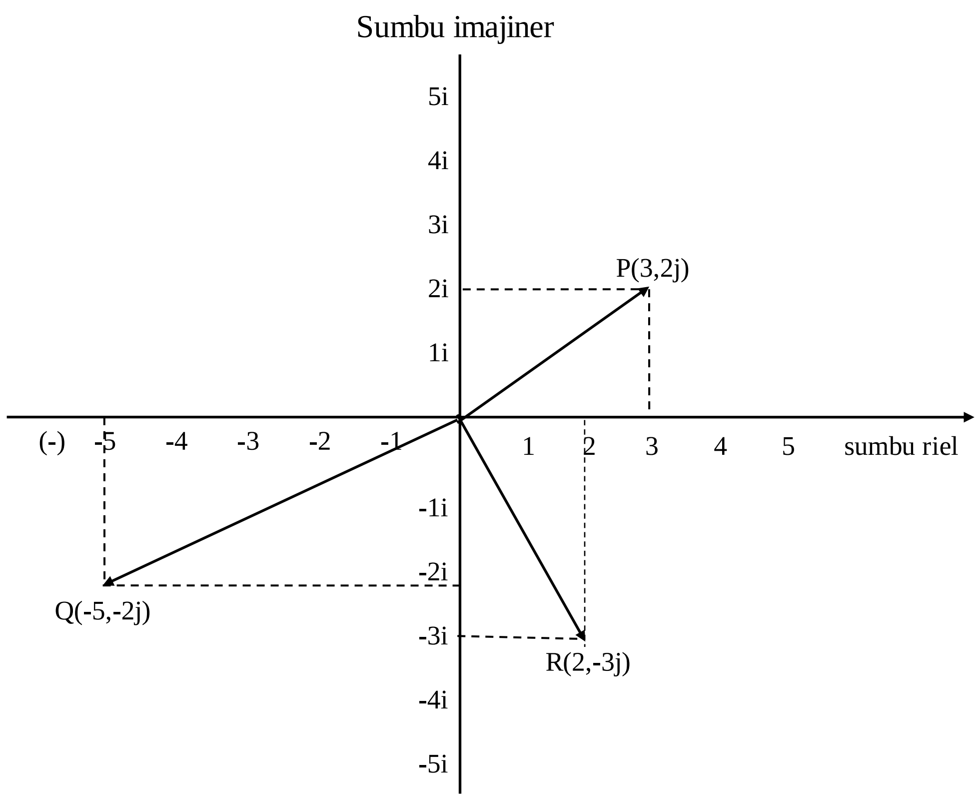
Apabila bilangan real dapat digambarkan pada suatu garis (ruang berdimensi 1 atau dalam R^1), maka bilangan kompleks tidak dapat digambarkan dalam R^1. Hal ini dikarenakan dalam bilangan kompleks tersebut terdapat dua unsur, yaitu bagian real dan bagian imajiner. Untuk menggambarkan bilangan kompleks diperlukan ruang berdimensi 2 (R^2) yang disebut sebagai diagram Argand.

Bilangan kompleks berbentuk a + bj disebut sebagai bilangan kompleks Kartesius.

Dalam diagram Argand sumbu mendatar merepresentasikan bagian real, sedangkan sumbu tegak merepresentasikan bagian imajiner. Gambar (4.3.a) adalah diagram Argand yang dimaksud.



Gambar 4.3.a



Gambar 4.3.b

Gambar 4.3.b menunjukkan titik-titik P, Q dan R yang masing-masing mempunyai harga $3 + 2j$, $-5 - 2j$ dan $2-3j$

4.4 Beberapa Operasi Bilangan Kompleks

a. Penjumlahan/pengurangan

Misalkan $z_1 = a + bj$ dan $z_2 = c + dj$.

Penjumlahan atau pengurangan dua buah bilangan kompleks dilakukan dengan menjumlahkan/mengurangkan bagian real dan imajinernya.

Jadi,

i) $z_1 + z_2 = (a + bj) + (c + dj)$

$= (a + b) + (c + d)j$

ii) $z_1 - z_2 = (a + bj) - (c + dj)$

$= (a - c) + (b - d)j$

Contoh Tentukan $(z_1 + z_2)$, dan $(z_1 - z_2)$, jika $z_1 = 4 + 5j$ dan $z_2 = -3 - 2j$,

Penyelesaian

$z_1 + z_2 = (4 + 5j) + (-3 - 2j)$

$= (4 - 3) + (5 - 2)j$

$= 1 + 3j$

$z_1 - z_2 = (4 + 5j) - (-3 - 2j)$

$= (4 + 3) + (5 +2)j$

$= 7 + 7j$

b. Perkalian

Ambil $z_1 = a + bj$ dan $z_2 = c + dj$. Dengan perhitungan $j^2 = -1$, maka

$z_1.z_2 = (a + bj)(c + dj)$

$= ac + (ad + bc)j + bd(j^2)$

$= ac + (ad + bc)j + bd(-1)$

$= (ac - bd) + (ad + bc)j$

Hasil kali perkalian dua buah bilangan kompleks di atas adalah

$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5j)\,(-3 - 2j)$

$= \{4(-3) - 5(-2)\} + \{4(-2) + 5(-3)\}j$

$= \{-12 + 10\} + \{-8 - 15\}j$

$= -2 - 23j$

Bagaimana hasil bagi z_1/z_2 ?

Untuk melakukan operasi pembagian diperlukan pengertian tentang konjugat atau sekawan dari suatu bilangan kompleks. Berikut adalah penjelsannya

c. Sekawan (konjugat)

Konjugat dari suatu bilangan kompleks z = a + bj yang dinotasikan sebagai z_k atau $\bar{z}$ didefinisikan sebagai $\bar{z}$ = a − bj. Sehingga perkalian suatu bilangan dengan sekawannya adalah:

$z\bar{z} = (a + bj)\,(a - bj)$

$= a^2 - (bj)^2$

$= a^2 + b^2$

d) Pembagian

Misalkan $z_1 = a + bj$ dan $z_2 = c + dj$. Maka

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{(z_2)_k}{(z_2)_k}$$

$$= \frac{(a+bj)}{(c+dj)}\frac{(c-dj)}{(c-dj)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,j}{c^2+d^2}$$

Contoh Tentukan $\frac{z_1}{z_2}$, jika $z_1 = 4 + 5j$ dan $z_2 = 3 - 2j$

Penyelesaian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(4+5j)}{(3-2j)}$$

$$= \frac{(4+5j)}{(3-2j)}\frac{(3+2j)}{(3+2j)}$$

$$= \frac{(4.3+5.2)+(5.3-4.2)j}{3^2+(-2)^2}$$

$$= \frac{22+7j}{13} = \frac{22}{13} + \frac{7}{13}j$$

Latihan 4.4

1) Selesaikan persamaan kwadrat berikut:

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 5 = 0$ c) $y^2 + 2y + 2 = 0$

d) $z^2 + 2z + 5 = 0$ e) $z^2 + 6z + 25 = 0$ f) $25z^2 + 8z + 1 = 0$

g) $x^2 + 4x + 5 = 0$ h) $x^2 + x + 1 = 0$ i) $x^2 + 8x + 25 = 0$

j) $25x^2 + 6x + 1 = 0$ k) $4x^2 + 36 = 0$ l) $x^2 + 25 = 0$

2) Evaluasilah perpangkatan berikut, kemudian gambarkan hasil akhirnya dalam diagram Argand !

a) j^2; j^3; j^4; j^5; j^7

b) $\frac{2}{j^3}$ c) $\frac{5}{j^7}$ d) $\frac{7}{j^5}$

3) Jika $z_1 = 3 + 2j$, $z_2 = -4 + 3j$, $z_3 = 5 - 3j$ dan $z_4 = -2 - 4j$ tentukanlah !

(a) $z_1 + z_2 - z_3$ (b) $3z_1 + z_2 - 2z_3$ (c) $-2z_1 + 3z_2 - z_3$ (d) $3z_1 + 2z_2 - 5z_4$

(e) $(z_1 . z_2)z_3$ (f) $(z_2 . z_3)z_4$ (g) $z_1(z_2 . z_4)$ (h) $z_2(z_3 . z_4)$

(i) $\frac{z_1 - z_3}{z_1 + z_3}$ (j) $\frac{z_1 + z_3}{z_2 - z_4}$ (k) $\frac{(z_1 z_3)}{(z_1 + z_3)}$ (l) $\frac{z_1 - z_3}{z_2 z_4}$

(m) $\frac{1}{z_1}$ (n) $\frac{1}{z_2}$ (o) $\frac{1}{z_3}$ (p) $\frac{1}{z_4}$

(q) $\frac{z_1 - z_3}{z_1 + z_3}$ (r) $\frac{z_1 + z_3}{z_2 - z_4}$ (s) $\frac{(z_1 z_3)}{(z_1 - z_3)}$ (t) $\frac{z_2 - z_3}{z_2 z_4}$

(u) $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ (v) $\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}$ (x) $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_3}$ (y) $\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_4}$

Selanjutnya gambarkan hasil akhirnya dalam diagram Argand !

4) Selesaikan persamaan bilangan kompleks berikut ini !

a) 3(a + bj) = 7 − 3j

b) (3 + j)(2 − 5j) = x + yj

c) (a − 2bj) + (b − 3aj) = 7 + 3j

4.5 Bentuk Polar Bilangan Kompleks

Misalkan z bilangan kompleks dalam bentuk Kartesius dengan z = x + yi atau z = x + yj. Bilangan ini ditunjukkan oleh diagram Argand (Gb 4.5). Misalkan r adalah jarak OZ (dari O ke Z) dan θ adalah sudut yang dibentuk antara OZ dengan sumbu real positip.

Dalam trigonometri didapat, $\cos\theta = \frac{x}{r}$ atau $x = r\cos\theta$ dan $\sin\theta = \frac{y}{r}$ atau $y = r\sin\theta$

Sehingga secara polar bentuk tersebut dapat dinyatakan sebagai

$z \quad = x + yi$

$\quad = r\cos\theta + (r\sin\theta)i$

$\quad = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

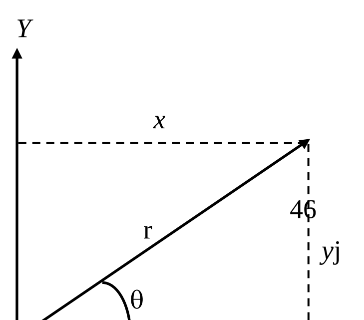
$\quad = r \text{ cis } \theta$

Dalam pembicaraan berikutnya bentuk tersebut lebih sering disajikan dengan notasi z = r ∠ θ atau z = [r, θ]. Selanjutnya r disebut sebagai modulus (*magnitude)* dan ditulis dengan notasi mod z atau dengan notasi harga mutlak |z|.

Dengan rumus *Phytagoras* diperoleh |z| = r = $\sqrt{(x^2 + y^2)}$

Modulus tersebut dalam diagrama rgand digambarkan sebagai jarak OZ. Selanjutnya θ disebut sebagai *argumen* atau *amplitudo* dari z dan ditulis dengan notasi arg z

Ada pun harga dari argumen tersebut adalah θ = arg z = *arc tg* $(\frac{y}{x})$



Dalam penulisan umum yang dipakai, θ dinyatakan dalam $-\pi < \theta \leq \pi$. Misalnya jika ada suatu bilangan kompleks $z = -4 - 4j$, maka bentuk ini lebih tepat disajikan sebagai $z = 4\sqrt{2} \angle -135^o$ kendatipun pernyataan $z = 4\sqrt{2} \angle 225^o$ secara matematis juga benar. Bagaimana jika $z = 3 - 2j$?

Beberapa cotoh berikut adalah contoh-contoh penyajian bentuk kartesius ke dalam bentuk polar yang gambarnya dapat dilihat dibawahnya.

(a) $z_1 = -3 + 4j$ (bentuk kartesius)

Misalkan $z_1 = r_1 \angle \theta_1$

$r_1 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, dan

Dengan perhitungan kalkulator $\theta_1 = arc\ tg \dfrac{4}{-3} = -53^0 8'$

Karena z_1 berada pada kwadran ke-2, maka $\theta_1 = -53^o\ 8^1 + 180^0 = 126^0\ 52^1$

Jadi $z_1 = -3 + 4j = 5 \angle 126^o\ 52^1$

b) $z_2 = -2 - 2j$ (bentuk Kartesius)

Misalkan $z_2 = r_2 \angle \theta_2$

$r_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

Dengan perhitungan kalkulator

$$\theta_2 = arc\ \text{tg}\ \frac{2}{2} = 45^o$$

Karena z_2 berada pada kwadran ke-3, maka $\theta_2 = 45^0 + 180^0 = 225^0$ dan lebih tepat dinyatakan sebagai -135^0

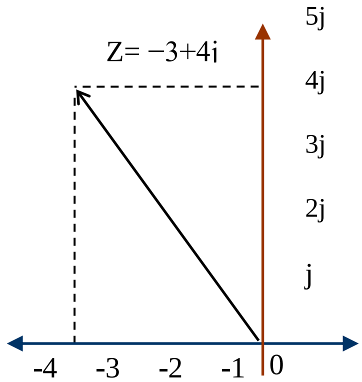
Jadi $z_2 = -2 - 2j = \sqrt{8} \angle -135^0$

c) $z_3 = 5 - 3j$ (bentuk Kartesius)

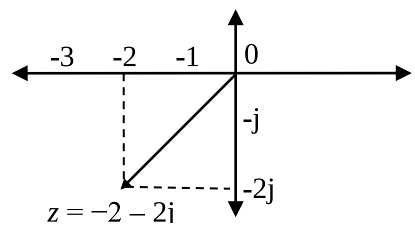
Dengan cara sama seperti contoh (a) dan (b) diperoleh:

$r_3 = 5{,}8$ dan $\theta_3 = -30{,}96^o$

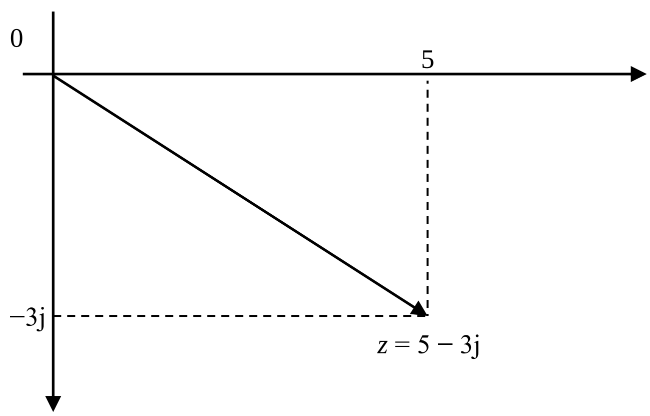
Jadi secara polar $z_3 = 5 - 3j = 5{,}8 \angle -30{,}96^o$



Gambar 4.b



Gambar 4.c



Gambar 4d

4.6 Satuan Sudut

Angka pecahan dalam derajad dapat dinyatakan dalam bentuk decimal, misalnya setengah derajad dapat dinyatakan sebagai 0.5^0 dan lima seperempat derajad dapat dinyatakan sebagai 5.25^0

$$\frac{1}{2}^0 = 0.5^0 \text{ dan } 5\frac{1}{4}^0 = 5.25^0$$

Metode penulisan lain sering digunakan. Dalam metode ini satu derajad dibagi menjadi 60 bagian yang disebut *menit*, dan satu menit dibagi menjadi 60 bagian yang disebut *detik*, sehingga $1^0 = 60'$ dan $1' = 60''$

Contoh 1 Nyatakan sudut $175^0 15' 45''$ dalam system decimal.

$$45'' = \left(\frac{45}{60}\right)' = 0.75'$$

$$15'45'' = 15.75'$$

$$15.75' = \left(\frac{15.75}{60}\right)^0 = 0.26^0$$

Jadi $175^0 15' 45'' = 175^0 + 0.26^0 = 175.26^0$

Contoh 2 Nyatakan sudut 40.17^0 dalam derajad, menit, dan detik.

$$0.17^0 = (0.17 \times 60)' = 10.2' = 10' + 0.2'$$

$$0.2' = (0.2 \times 60)'' = 12''$$

$$0.17^0 = 10'12''$$

Jadi $40.17^0 = 40^0 10' 12''$

Contoh 3 Tentukan hasil jumlah dari $125^0 48' 30''$ dan $7^0 51' 42''$

$$\begin{array}{r} 125^0 48' 30'' \\ \underline{7^0 51' 42''} \; + \\ 132^0 99' 72'' \end{array}$$

Karena $60'' = 1'$ dan $60' = 1^0$, maka $99' = 1^0 39'$ dan $72'' = 1' 12''$

Jadi $132^0 99' 72'' = 133^0 40' 12''$

Contoh 4 Kurangkan $8^0 52' 6''$ dari $44^0 14' 3''$

$$44^0 14' 3'' = 44^0 13' 63'' = 43^0 73' 63''$$

$$\begin{array}{r} 43^0 73' 63'' \\ \underline{8^0 52' \; 6''} \; - \\ 35^0 21' 57'' \end{array}$$

Contoh 5 Berapakah hasil kali 7 dengan $5^0 35' 30''$

$$7 \times 5^0 = 35^0$$

$$7 \times 35' = 175^0 = 2^0 55'$$

$$7 \times 30'' = 210'' = 3' 30''$$

Jadi $7 \times 5^0 35' 30'' = 35^0 + 2^0 55' + 3' 30'' = 37^0\, 58' 30''$

4.7 Operasi Bilangan Kompleks Bentuk Polar

Operasi perkalian dan pembagian pada bilangan kompleks lebih mudah dilakukan pada bentuk polar dari pada bentuk Kartesius. Uraian berikut menjelaskan operasi perkalian dan pembagian bilangan kompleks dalam bentuk polar.

a) Perkalian

Maka $z_1\, z_2 = [r_1 \angle \theta_1][\, r_2 \angle \theta_2]$

$$= [r_1 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)][r_2 (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)]$$

$$= r_1r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + j^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)+ j (\sin \theta_2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2 \sin \theta_1)]$$

$$= r_1r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + j (\sin \theta_2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2 \sin \theta_1)]$$

$$= r_1r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + j \sin (\theta_1 + \theta_2)]$$

$$= r_1r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

b) Pembagian

Misalkan $z_1 = r_1 \angle \theta_1$ dan $z_2 = r_2 \angle \theta_2$. Maka

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} \qquad = \frac{r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)} \times \frac{r_2(\cos\theta_2 - j\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 - j\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) + j(\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_2 \cos\theta_1)]}{r_2(1)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

Dari rumus tersebut tampak bahwa hasil pembagian dua buah bilangan kompleks adalah modulusnya dibagikan, sedangkan argumennya dikurangkan. Sehingga

(1) $\dfrac{9\angle 65^0}{3\angle 21^0} = 3\angle 44^0$

(2) $\dfrac{12\angle 135^0}{5\angle 44^0 35^'} = 2{,}4\angle(135^0 - 44^0 35^')]$

$= 2{,}4\angle 90^0 25^'$

(3) $\dfrac{10\angle 2\pi}{5\angle \frac{\pi}{4}} = 2\angle(2\pi - \dfrac{\pi}{4})$

$= 2\angle \dfrac{7\pi}{4}$

4.8 Teorema *De Moivre*

Dengan menggunakan kaidah perkalian bilangan kompleks dalam bentuk polar sebagaimana dipaparkan pada sub bab (4.3), maka

Jika $z = r \angle \theta$, maka $z^2 = (r \angle \theta)\,(r \angle \theta) = r^2 \angle 2\theta$

Dengan cara yang sama diperoleh $z^3 = z^2 .\ z = (r^2 \angle 2\theta)\,(r \angle \theta) = (r^3 \angle 3\theta)$

Dengan cara yang sama diperoleh $z^4 = z^3 .\ z = (r^3 \angle 3\theta)\,(r \angle \theta) = (r^4 \angle 4\theta)$

Sehingga secara umum $z^n = z^{n-1} .\ z = (r^n \angle n\theta)$

atau $z^n = r^n (\cos n\theta + j \sin n\theta)$

Sebagai contoh, jika $z = 3 \angle 30^0$, maka $z^6 = (3 \angle 30^0)^6 = 3^6 \angle (6.30^0) = 729 \angle 180^0$

Mencari akar bilangan kompleks

Jika $z^n = r\angle\theta$, maka $z_i = r^{\frac{1}{n}} \angle \dfrac{\theta + k.360^0}{n}$

dimana i = 1, 2, 3, ….n. dan k = i − 1

z_i: akar ke i persamaan kompleks tersebut

Contoh 1

a. Tentukan kwadrat dari $z = 3 - 4j$, dalam bentuk

i) Kartesius

ii) Polar

Selanjutnya bandingkan hasilnya !

Penyelesaian

i) Dalam bentuk kartesius

$z^2 = (3 - 4j)^2 = (3 - 4j)(3 - 4j)$

$= [9 + 16 (j^2)] [(-12 - 12)j] = -7 - 24j$

ii) Dalam bentuk polar

$z = 3 - 4j$, maka $r = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$ dan $\theta = \text{arc tg } (4/3) = 53^0\ 8^1$.

Karena bilangan kompleks ini terletak pada kwadran ke 4, maka $\theta = -53^0\ 8^1$.

Sehingga $z = 5 \angle -53^0\ 8^1$

$z^2 = (5 \angle -53^0\ 8^1)^2 = 5^2 \angle [2 (-53^0\ 8^1)] = 25 \angle -106^0\ 16^1$

b. Tentukan $(-2 + 3j)^5$

Penyelesaian

Secara polar $r = \sqrt{((-2)^2 + 3^2)} = \sqrt{13}$

$\theta = \text{arc tg } (3/2) = 56^0\ 19^0$. Karena terletak pada kwadran ke-4, maka

$\theta = 180^0 - 56^0\ 19^0 = 123^0\ 41^1$

Sehingga $z = \sqrt{13} \angle 123^0\ 41^1$ dan

$z^5 = (\sqrt{13} \angle 123^0\ 41^1)^5 = 13^{5/2} \angle (5.123^0\ 41^1) = 13^{5/2} \angle 618^0\ 25^1$

$= 13^{5/2} \angle -101^0\ 35^1$

c. Tentukan akar kwadrat dari bilangan kompleks 12 + 5j baik dalam bentuk Kartesius maupun bentuk Polar (sampai 3 angka secara signifikan)

Penyelesaian

Persoalan tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan

$z^2 = 12 + 5j$

$r = \sqrt{(12^2 + 5^2)} = \sqrt{169} = 13$

$\theta = \text{arc tg } (5/12) = 22^0\ 37^1$

Sehingga $z^2 = 13 \angle 22^0\ 37^1$…………………………..(a)

Oleh karena kita akan mencari akar kwadrat, maka terdapat dua harga akar. Untuk mendapatkan akar yang kedua, maka argumen bilangan tersebut dapat dinyatakan sebagai (22^0 37^1 + 360^0) = 382^2 37^1.

Sehingga $z^2 = 13 \angle 382^0\ 37^1$…………………………(b)

Jika akar-akarnya kita sebut sebagai z_1 dan z_2, maka z_1 dapat diturunkan dari bentuk (a), sedangkan z_2 dapat diturunkan dari bentuk (b). Jadi

$z_1 = (13 \angle 22^0\ 37^1)^{1/2}$

$\quad = 13^{1/2} \angle 11^0\ 18^1\ 30^{11}$

$z_2 = 13^{1/2} \angle 191^0\ 18^1\ 30^{11}$

$\quad = 13^{1/2} \angle -168^0\ 41^1\ 30^{11}$

Latihan 4

1. Tentukan akar-akar dari persamaan kuadrat berikut !

(a) $x^2 + 25 = 0$	(b) $x^2 + 2x + 2 = 0$	(c) $2x^2 + 3x + 4 = 0$
(d) $5y^2 + 2y = 0$	(e) $4t^2 - t = -1$	(f) $x^2 + 2x + 5 = 0$
(g) $x^2 + 4x + 5 = 0$	(h) $x^2 + 6x + 25 = 0$	(i) $x^2 + 8x + 25 = 0$
(g) $z^2 + 2z + 3 = 0$	(h) $z^2 + 2z + 4 = 0$	(i) $z^2 + 3z + 9 = 0$

2. Tunjukkan dalam diagram argand bilangan-bilangan kompleks berikut ini! (TH)

(a) $6 + 3j$	(b) $3 - 2j$	(c) $-4 + 3j$	(d) $-3 - 4j$
(e) $5 + 7j$	(f) $4 - 7j$	(g) $-3 + 5j$	(h) $-30 - 25j$
(i) $10 + 3j$	(j) $3 - 7j$	(k) $-8 + 9j$	(l) $-25 - 20j$
(m) $7 + 2j$	(n) $30 - 15j$	(o) $-6 + 9j$	(p) $-20 - 25j$
(q) $12 + 24j$	(r) $35 - 20j$	(t) $-18 + 9j$	(u) $-15 - 20j$
(v) $5 + 12j$	(w) $27 - 21j$	(x) $-8 + 12j$	(y) $-35 - 21j$

3. Tuliskan konjugat dari bilangan-bilangan kompleks berikut !

(a) $5 + 3j$	(b) $3 - 5j$	(c) $-3 + 7j$	(d) $-7 - 3j$
(e) 10	(f) $-3j$	(g) $5 + 7j$	(h) $7 - 5j$
(i) $-9 - 3j$	(j) -10	(k) $5j$	(l) $9 + 3j$

(m) $-3+9j$ (n) $-7-10j$ (o) 7 (p) $-15j$

(q) $6+3j$ (r) $9-5j$ (s) $-10+7j$ (t) $-11-3j$

(u) -15 (v) $35j$ (w) $6+3j$ (x) $9-5j$

(y) $-10+7j$ (z) $-15-17j$

4. Jika $z_1 = 2+3j$; $z_2 = 3-4j$; $z_3 = -1+2j$ dan $z_4 = -2-5j$, tentukan

(a) $z_1 + z_2$ (b) $z_2 - z_4$ (c) $3z_1 - 2z_3$ (d) $z_1 z_3$ (e) $(z_1 z_2)z_3$

(f) $z_1(z_3 z_4)$ (g) $\dfrac{z_1}{z_3}$ (h) $\dfrac{z_2}{z_4}$ (i) $\dfrac{z_1+z_2}{z_3-z_4}$ (j) $\dfrac{z_1-z_2}{z_3+z_4}$

(k) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3-z_4}$ (l) $\dfrac{z_1+z_2}{z_3 z_4}$ (m) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$ (n) $\dfrac{z_2}{z_1 z_3}$ (o) $z_1^2 - z_2^2$

5. Tentukan hasil dari

$$\left[\frac{(1+j)^2-(2-j)^2}{j}\right]$$

6. Jika $z_1 = 4-3j$ dan $z_2 = 3+2j$, tentukan x dan y

$$x+yj = \frac{1}{z_1-z_2} + \frac{1}{z_1 z_2}$$

7. Tentukan

(a) j^2 b) j^3 c) j^4 d) j^5 e) j^6 f) j^7 g) j^{10} h) j^{13} i) j^{15} j) j^{18} k) j^{26}

l) $\dfrac{1}{j^2}$ m) $\dfrac{1}{j^3}$ n) $\dfrac{5}{j^4}$ o) $\dfrac{5}{j^5}$ p) $\dfrac{15}{j^7}$ q) $\dfrac{7}{j^{10}}$

8. Tentukan z^2 jika (a) $z = \dfrac{5+4j}{3-2j}$, dan (b) $z = \dfrac{-3+5j}{5+7j}$

9. Pada soal-soal berikut tentukan modulus dan argumennya.

(a) $3+4j$ (b) $4-2j$ (c) $-3-4j$ (d) $-5+2j$

(e) $7+4j$ (f) $7-2j$ (g) $-7-4j$ (h) $-7+2j$

(i) $5\sqrt{3}+5j$ (j) $-5\sqrt{3}+5j$ (k) $5\sqrt{3}-5j$ (l) $-5\sqrt{3}-5j$

(m) $8+5j$ (n) $6-5j$ (o) $-4-5j$ (p) $-2+5j$

(q) $17+4j$ (r) $7-12j$ (t) $-5-8j$ (u) $-14+21j$

(m) $8+6j$ (n) $16-12j$ (o) $-8-15j$ (p) $-12+5j$

(q) $3 + 16j$ (r) $6 - 21j$ (s) $-18 - 15j$ (t) $-28 + 15j$

(u) $30 + 36j$ (v) $60 - 24j$ (w) $-18 - 12j$ (x) $-28 + 21j$

(y) $13 + 16j$ (z) $16 - 24j$

10 (a) Untuk soal-soal nomor 9 nyatakan bentuk polarnya! (TH)

(b) Nyatakan bentuk polar dari (a) $z = 9$ (b) $z = -7$ (c) $z = 10\ j$ (d) $z = -5j$

11 Untuk soal-soal berikut nyatakan kedalam bentuk Kartesius! (TH)

(a) $6\angle 30^0$ (b) $5 \angle -50^0$ (c) $7 \angle -135^0$ (d) $9 \angle 150^0$

(e) $16\angle 20^0$ (f) $25 \angle -30^0$ (g) $37 \angle -125^0$ (h) $49 \angle 170^0$

(i) $10\angle 25^0$ (j) $15 \angle -55^0$ (k) $27 \angle -115^0$ (l) $39 \angle 195^0$

(m) $65\angle 47.75^0$ (n) $57 \angle -57.25^0$ (o) $77 \angle -121.30^0$ (p) $91 \angle 175.21^0$

(q) $5\angle 25^0 25'$ (r) $15 \angle -35^0 45'$ (s) $17 \angle -127^0\ 21'$ (t) $9 \angle 175^0 54'$

(u) $11\angle 5^0 15' 25''$ (v) $15 \angle -37^0 25' 31''$ (w) $7 \angle -157^0 10''$ (x) $9 \angle 150^0 57''$

(y) $7 \angle 135^0\ 27' 40''$ (z) $9 \angle -170^0 37''$

12 Jika $z_1 = 3 \angle 35^0$, $z_2 = 5 \angle 120^0\ 35'$, $z_3 = 7 \angle -40^0\ 45'$, $z_4 = 9 \angle -134^0\ 45''$, dan $z_5 = 10 \angle 90^0$

(1) Gambarkan z_1, z_2, z_3, z_4, dan z_5

(2) Tentukan hasil dari!

(a) $z_1 + z_2$ (b) $z_1 + z_3$ (c) $z_1 + z_4$ (d) $z_2 + z_3$ (e) $z_2 + z_4$

(f) $z_3 + z_4$ (g) $z_1 - z_2$ (h) $z_1 - z_3$ (i) $z_1 - z_4$ (j) $z_2 - z_3$

(k) $z_2 - z_4$ (l) $z_3 - z_4$ (m) $z_1\ z_2$ (n) $z_1\ z_3$ (o) $z_1\ z_4$

(p) $z_2\ z_3$ (q) $z_2\ z_4$ (r) $z_3\ z_4$ (s) $\frac{z_1}{z_2}$ (t) $\frac{z_1}{z_3}$

(u) $\frac{z_1}{z_4}$ (v) $\frac{z_2}{z_3}$ (w) $\frac{z_2}{z_4}$ (x) $\frac{z_3}{z_4}$ (z) $\frac{z_1}{z_4}$

13. Tentukan hasil dari!

(a) $[5 \angle 35^0][6\angle -140^0]$ (b) $[4,5\angle 132^0][6\angle 68^0]$ (c) $[15 \angle 135^0\ 15'][6\angle 40^0\ 55^1]$

(d) $[25 \angle 15^0\ 15'\ 30''][6\angle 40^0\ 55^1\ 50'']$ (e) $[15 \angle 135^0][6\angle 40^0]$

(f) $[4{,}5\angle -32^0 25^{'}][6\angle 68^0 37^{'}]$ (g) $\dfrac{55\angle 45^0 25^{'} 5^{''}}{5\angle 24^0 35^{''}}$ (h) $\dfrac{45\angle 45^0 25^{'} 5^{''}}{15\angle 24^0 30^{'} 35^{''}}$

(i) $\dfrac{55\angle 45^0 25^{'} 5^{''}}{5\angle 24^0 35^{''}}$ (j) $\dfrac{6\angle -15^0 25^{''}}{30\angle 23^0 35^{'}}$ (k) $\dfrac{25\angle 45^0 25^{'} 5^{''}}{150\angle 20^0 35^{'} 15^{''}}$

14. Pada soal-soal berikut tentukan hasilnya dalam bentuk Kartesius dan Polar!

(a) $(2 + 3j)^2$ (b) $(5 - 4j)^2$ (c) $(-3 + 4j)^3$ (d) $(-8 - 6j)^5$

(e) $[4\angle 45^0 30^{'}]^2$ (f) $[4\angle 135^0 30^{'}]^4$ (g) $[10 \angle -90^0]^5$ (h) $[4\angle -55^0 30^{'}]^8$

15. Tentukan akar-akar bilangan kompleks berikut dalam bentuk Kartesius !

(a) $3 + 4j$ (b) $4 - 3j$ (c) $-3 + 4j$ (d) $-6 - 8j$ (e) $4j$ (f) -8

16. Soal berikut rubah dulu kebentuk polar kemudian carilah z^7, jika $z = -5 - 5j$

17. Tentukan akar-akar dari persamaan bilangan kompleks berikut!

(a) $z^2 = 9$ (b) $z^2 = -25$ (c) $z^2 = 9j$ (d) $z^2 = -16j$

(e) $z^3 = 8$ (f) $z^3 = -8$ (g) $z^3 = 8j$ (h) $z^3 = -8j$

(i) $z^3 = 5\sqrt{3} + 5j$ (j) $z^4 = 5 - 5\sqrt{3}j$ (k) $z^3 = -27$ (l) $z^3 = 27j$

(m) $z^3 = -27j$ (n) $z^3 = -5\sqrt{3} + 5j$ (0) $z^4 = -5\sqrt{3} - 5j$ (p) $z^5 = -5\sqrt{3} - 5j$

Rangkuman

A. Bentuk polar bilangan kompleks

Jika $z = a + bj$, maka bentuk polar dari z adalah $z = r \text{ cis } \theta$ atau $z = r \angle\theta$

B. Operasi bentuk Kartesius

Jika $z_1 = a + bj$ dan $z_2 = c + dj$, maka:

a. $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)j$

b. $z_1.z_2 = (a + c)\ (b + d)j$

$= (ac - bd) + (ad + bc)j$

c. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)j}{c^2+d^2}$

C. Operasi bentuk polar

Misalkan $z_1 = r_1 \angle \theta_1$ dan $z_2 = r_2 \angle \theta_2$. Maka

a) Perkalian

Maka $z_1 z_2 = [r_1 \angle \theta_1][r_2 \angle \theta_2]$

$= r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$

b) Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

D. Teorema De Moivre

Jika $z = r \angle \theta$,

Maka $z^n = z^{n-1}.\ z = (r^n \angle n\theta)$

atau $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

BAB 5
VEKTOR

Materi Pembelajaran

5.1 Pengertian Vektor

5.2 Skalar

5.3 Aljabar Vektor

5.4 Hukum-hukum Aljabar Vektor

5.5 Vektor Satuan

5.6 Hasil Kali Titik atau *Dot Product*

5.7 Hasil Kali Silang atau *Cross Product*

Tujuan Pembelajaran

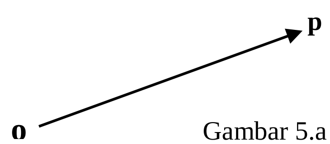
Setelah mempelajari bab ini Mahasiswa diharapkan mampu:

- Memahami pengertian Vektor,
- Menerapkan konsep-konsep Vektor untuk menyelesaikan masalah-masalah keteknikan, khususnya masalah teknik listrik

5.1 Pengertian Vektor

Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah, misalnya perpindahan, kecepatan, percepatan, gaya dan lain-lain.

Secara grafis, vektor digambarkan oleh sebuah anak panah (gambar 5.a) yang menentukan arahnya, sedangkan besarnya ditentukan oleh panjang anak panah tersebut. Ujung pangkal anak panah **O** disebut *titik asal atau titik pangkal vektor*, sedangkan ujung kepala **P** disebut sebagai titik terminal atau *terminus.*



Gambar 5.a

Secara analitis , vektor dilambangkan oleh sebuah huruf dengan anak panah di atasnya, misalnya

$$\vec{A} \text{ dan besarnya dinyatakan sebagai } \left|\vec{A}\right|$$

Dalam tulisan ini vektor tersebut ditulis sebagai **A**, sedangkan skalarnya sebagai $|A|$. Vektor OP juga dapat dinyatakan sebagai $(\overrightarrow{OP})$ atau **OP** saja, sehingga besarnya (skalarnya) dinyatakan sebagai | $\overrightarrow{OP}$ | atau | **OP** |.

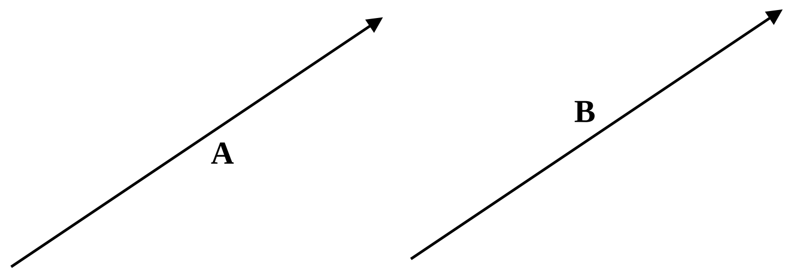
5.2 Skalar

Skalar adalah suatu besaran yang mempunyai besar tetapi tidak punya arah. Misalnya massa, suhu, panjang, waktu dan sebagainya. Skalar dinyatakan dalam huruf-huruf biasa seperti pada aljabar elementer, begitu juga aturan-aturan dalam operasi skalar mengikuti aljabar elementer.

5.3 Aljabar Vektor

Operasi-operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian yang lazim dilakukan pada aljabar bilangan atau skalar dengan definisi yang sesuai dapat diperluas kedalam aljabar vektor.

i) Dua buah vektor **A** dan **B** dikatakan sama, jika arah dan besarnya sama. Hal ini berlaku tanpa memandang di mana titik pangkalnya (gambar 5.b)



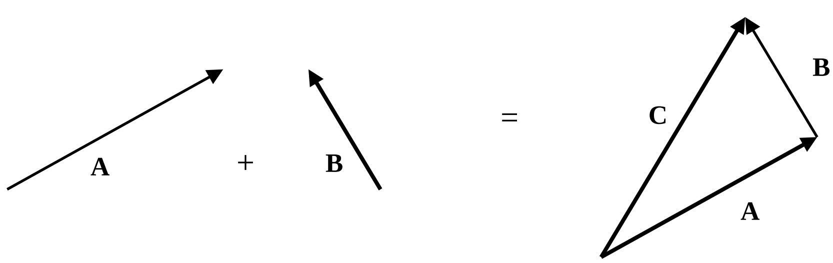
Gambar 5.b

ii) Sebuah vektor yang arahnya berlawanan dengan vektor **A,** akan tetapi mempunyai panjang yang sama dengan **A** dapat dinyatakan sebagai **-A** (gambar 5.c)

Gambar 5. c

iii) Jumlah dari vektor **A** dan **B** adalah sebuah vektor **C** yang dibentuk dengan menempatkan titik awal vektor **B** pada terminus **A** kemudian menghubungkan titik awal vektor **A** dengan terminus dari vektor **B.** (Gambar 5.d)

Penjumlahan tersebut dapat dinyatakan sebagai **C = A + B**



Gambar 5.d.: **A + B = C**

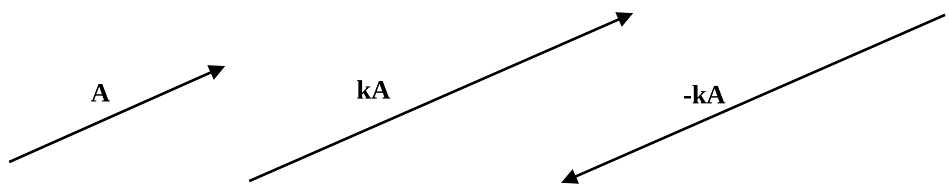
iv) Selisih dari vektor **A** dan **B** ditulis dengan **A − B** adalah sebuah vektor **C** yang apabila ditambahkan pada **B** menghasilkan vektor **A.** Secara ekivalen operasi **A - B,** dapat dinyatakan sebagai **A + (−B).**

Apabila **A = B**, maka **A − B** adalah vektor nol dan ditulis dengan notasi **O**. Vektor ini besarnya adalah 0 dan tidak memiliki arah.

Vektor yang tidak 0 disebut sebagai vektor sejati (proper vector).

v) Hasil kali skalar k dengan vektor **A** adalah vektor **kA.** Vektor ini besarnya $|k|$ kali besarnya vektor **A** dan memiliki arah yang sama atau berlawanan dengan **A**. Jika k positip **kA** arahnya sama dengan **A** tetapi jika k negatip **kA** arahnya berlawanan dengan **A.** Selanjutnya jika k = 0, maka hasilnya adalah vektor **O**

Gambar (5.e) di bawah ini menujukkan k**A** dan -k**A.,** jika k > 0 dan k > 1



Gambar 5.e.

5.4 Hukum-hukum Aljabar Vektor

Jika A, B dan C adalah tiga buah vektor, m dan n adalah skalar-skalar, maka:

(1) **A + B**	**= B + A**	(hukum komutatif terhadap jumlah)
(2) **A + (B + C)**	**= (A + B) + C**	(hukum assosiatif terhadap jumlah)
(3) m**A**	**= A**m	(hukum komutatif terhadap perkalian)
(4) m **(nA)**	**= (**mn**) A**	(hukum assosiatif terhadap perkalian)
(5) (m + n)**A**	= m**A** + n**A**	(hukum distributif)
(6) m**(A + B)**	= m**A** + m**B**	(hukum distributif)

Hukum-hukum ini memungkinkan kita untuk memberlakukan persamaan-persamaan vektor secara sama sperti kita meberlakukan pada aljabar biasa. Misalnya, jika **A + B = C,** maka **A = C - B**.

5.5 Vektor Satuan

Vektor satuan adalah sebuah vektor yang besarnya adalah satu. Jika **A** adalah sebuah vektor dan $|\mathbf{A}|$ adalah besarnya, maka $\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ adalah vektor satuan dengan arah yang sama dengan **A.**

A. Vektor Satuan Tegak Lurus

Himpunan vektor-vektor satuan yang dinotasikan sebagai **i, j** dan **k** yang terpenting adalah vektor-vektor satuan yang arahnya sama dengan sumbu x, y dan z positif dalam sistem koordinat tegak lurus ruang tiga dimensi (R^3).

Dalam hal ini akan digunakan sistem tegak lurus aturan tangan kanan. Hal tersebut di analogikan dari kenyataan bahwa sebuah sekrup berkalur kanan jika diputar 90^0 dari OX ke OY akan maju kearah OZ positif.

B. Komponen -komponen Sebuah Vektor.

Setiap vektor **A** dalam ruang 3 dimensi dapat digambarkan dengan titik pangkal O dari sitem koordinat tegak lurus (Gambar 5.5). Misalkan (A_1, A_2, A_3) adalah koordinat-koordinat tegak lurus titik terminal dari vektor **A** dengan titik asal **O**. Maka $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ dan $A_3\mathbf{k}$ disebut sebagai vektor-vektor komponen dari **A** yang berturut-turut searah dengan sumbu x, y dan z.

Selanjutnya vektor **A** digambarkan sebagai penjumlahan ketiga komponen di atas, yaitu

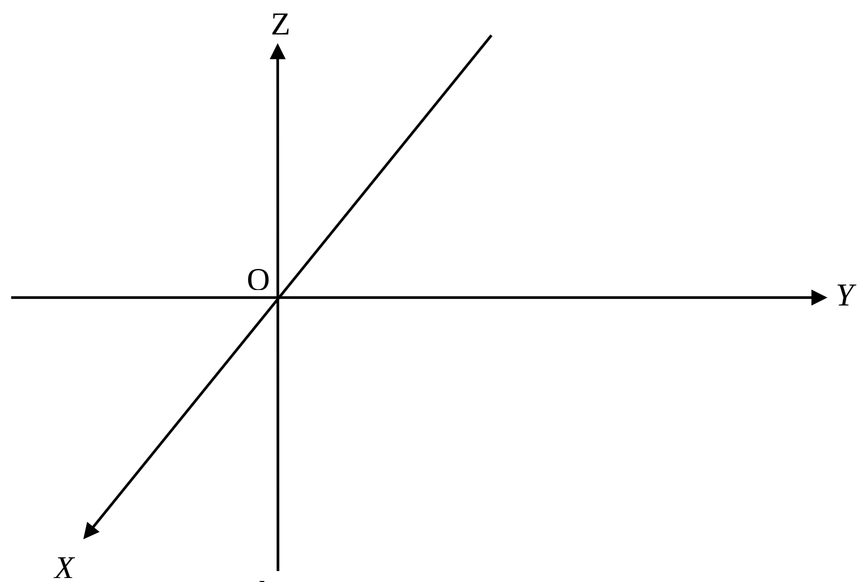
$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

Besarnya dihitung sebagai $|\mathbf{A}| = \sqrt{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)}$

C. Menjumlahkan Vektor melalui Komponen Vektor

Jika $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, dan $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, maka

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$, dengan $|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$



Gambar 5.5

5.6 Hasil Kali Titik atau *Dot Product*

Jika **A** dan **B** adalah dua buah vektor, **A** dan **B** membentuk sudut θ, maka hasil kali titik **A** dan **B** yang dinotasikan sebagai **A.B** (bisa dibaca **A** dot **B**) didefinisikan sebagai

$\mathbf{A.B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta, \; 0 \le \theta \le \pi$

Perhatikan bahwa hasilnya adalah suatu skalar, bukan vektor.

Sifat-sifat: Jika A dan B adalah dua buah vektor sembarang, maka

(1) **A.B** = **B.A**

(2) **A.(B + C)** = **A.B + A.C**

(3) **m(A.B)** = **m.A + m.B**

(4) **i.i = 1, j.j = 1, k.k = 1 dan i.j = 0, i.k = 0 , j.k = 0**

(5) Jika **A** = $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, dan **B** = $b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, maka

A.B $= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

A.A $= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

B.B $= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

(6) Jika **A.B = 0** dan **A**, **B** bukanlah vektor-vektor nol, maka **A** dan **B** saling tegak lurus

5.7 Hasil Kali Silang atau *Cross Product*

Jika **A** dan **B** adalah dua buah vektor, maka hasil kali silang dari **A** dan **B**, yaitu **C = AxB** (baca **A** cross **B**) didefinisikan sebagai besarnya **A** dan **B** dikalikan dengan sinus sudut yang dibentuk antara vektor **A** dan vektor **B**.

Jadi $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$

$$= |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|\ \sin\theta\ \mathbf{u}, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

dengan **u** adalah vektor satuan yang menujukka arah dari **AxB.** Jika vektor **A = B**, maka sin θ = 0 sehingga kita mendefinisikan **A x B = 0.**

Sifat-sifat:

(1). **A x B = −(B x A)**

(2). **A x (B + C) = A x B + A x C**

(3). **m(A x B) = (mA) x B = A x mB = (A x B)**m, dimana m adalah suatu skalar.

(4). **i x i = j x j = k x k = 0**

(5) Jika vektor **A** = a_1i + a_2j + a_3k dan **B** = b_1i + b_2j + b_3k, maka

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(6). Besarnya **A x B** sama dengan luas jajaran genjang dengan sisi-sisi **A** dan **B.**

(7). Jika **A x B = 0,** padahal **A** dan **B** tidak nol, maka **A** sejajar **B.**

Contoh 5.7

1. Jika vektor **A** = 2i + 2j − k dan **B** = 6i − 3j + 2k, tentukan sudut yang dibentuk antara kedua vektor tersebut.

   Penyelesaian:

   Misalkan sudut yang dibentuk antara kedua vektor tersebut adalah θ

   A.B = |**A**| |**B**| cos θ

   |**A**| = $\sqrt{[2^2 + 2^2 + (-1)^2}$]= 3, |**B**| = $\sqrt{[6^2 + (-3)^2 + 2^2}$ = 7

$\mathbf{A.B} = 2.6 + 2(-3) + (-1)(2) = 12 - 6 - 2 = 4$

$|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos\theta = 4$

$3.7 \cos\theta = 4,$

$21 \cos\theta = 4$, maka $\cos\theta = 4/21$

Jadi $\theta = \arc\cos(4/21) = 79{,}02^0$

2. Tentukan a sehingga $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j} + \mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ tegak lurus

Penyelesaian:

Dari contoh (1), **A** dan **B** saling tegak lurus jika **A.B** = 0.

Maka $\mathbf{A.B} = (2)(4) + (a)(-2) + (1)(-2) = 0$

$8 - 2a - 2 = 0,$

$2a = 6.$

Jadi $a = 3$

3. Carilah sudut-sudut yang dibentuk vektor $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ dengan sumbu-sumbu koordinat.

Penyelesaian:

Misalkan α, β dan γ masing-masing adalah sudut yang dibentuk oleh **A** dengan sumbu x, y dan z.

$|\mathbf{A}| = \sqrt{[}3^2 + (-6)^2 + 2^2 = 7$

$\mathbf{A.i} = |A|(1) \cos\alpha = 7 \cos\alpha$

$\mathbf{A.i = (3i - 6j + 2k) \,.\, i = 3\,(i.i) - 6j(i) + 2k(i) = 3}$

$7 \cos\alpha = 3$

$\cos\alpha = 3/7$.

Jadi $\alpha = \arc\cos(3/7) = 64{,}62^0$

Dengan cara yang sama diperoleh $\cos\beta = -6/7$, maka $\beta = \arc\cos(-6/7) = 149^0$ dan $\cos\gamma = 2/7$, sehingga $\gamma = \arc\cos(2/7) = 73^0$

4. Jika $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ carilah

(a) **AxB** (b) **BxA**

Penyelesaian:

(a) **A** x **B** = (2i − 3j − k) x (i + 4j − 2k)

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

= 10 i + 3 j + 11 k

(b) **B** x **A** = (i + 4j − 2k) x (2i − 3j − k)

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

= −10i − 3j − 11k

5. Sebuah perahu bergerak ke utara dengan kecepatan 8.0 mil/jam. Pada saat yang sama perahu tersebut diterpa angin yang cukup kencang ke arah barat dengan kecepatan 2.0 mil/jam. Arus air laut mengarah ke tenggara dengan kecepatan 5.0 mil/jam membentuk sudut 30^0 dari timur.

Tentukan arah dan kecepatan relative perahu terhadap bumi.

Penyelesaian

Misalkan kecepatan perahu adalah $R = (R_x, R_y)$

Komponen *x*	Komponen *y*
$A_x = 0$	$A_y = 8.0$ mil/jam
$B_x = -2.0$ mil/jam	$B_y = 0$
$C_x = C \cos 30^0$	$C_y = -C \sin 30^0$
$= 5.0$ mil/jam $\times 0.866$	$= -5.0$ mil/jam $\times 0.500$
$= 4.3$ mil/jam	$= -2.500$ mil/jam

Dengan menjumlahkan setiap komponen didapat $R = (R_x, R_y)$ sebagai berikut:

$R_x = A_x + B_x + C_x = (0 - 2.0 + 4.3)$ mil/jam $= 2.3$ mil/jam

$R_y = A_y + B_y + C_y = (8.0 + 0 - 2.5)$ mil/jam $= 5.5$ mil/jam

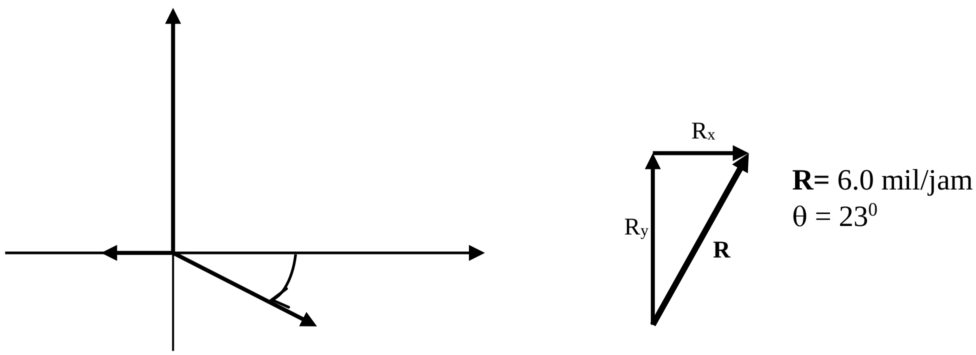
Magnitud dari R adalah

$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} = \sqrt{(2.3)^2 + (5.5)^2}\, mil/jam = 6.0\, mil/jam$$

Jadi kecepatan relative perahu terhadap permukaan bumi adalah 6.0 mil/jam.

Arah perahu dapat dihitung sebagai berikut

$$\tan\theta = \frac{R_x}{R_y} = \frac{2.3}{5.5} = 0.418 \Leftrightarrow \theta = arc.\tan 0.418 = 23^0 \text{ (dari utara)}$$



Gambar 5.7.1

Latihan 5

1. Jika vektor

a. **A** = 2i + 3j − 4k dan **B** = 6i − 4j + 2k,

b. **A** = 4i + 3j − 2k dan **B** = 6i − 7j + 8k,

c. **A** = 2i + 4j − 6k dan **B** = 6i − 4j + 2k,

d. **A** = 4i + 3j − k dan **B** = 6i − 4j + 8k,

e. **A** = 2i + 5j − 8k dan **B** = 7i − 4j + 3k,

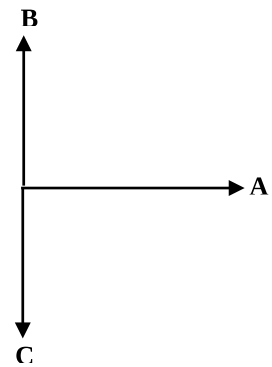
f. **A** = 2i + 5j − k dan **B** = 5i − 2j + 7k,

g. **A** = 2√3i + 4j − k dan **B** = 6i − 4√3j + 2k,

h. **A** = 4i + 3j − √5k dan **B** = 6i − 4√3j + 7k,

tentukan sudut yang dibentuk antara kedua vektor tersebut.

2. Andaikan arah $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ditunjukkan oleh gambar 5.7.2 berikut ini



Gambar 5.7.2

Jika $\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} - \vec{C})$, dan

a. $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{3}, \left|\vec{B}\right| = 1, \left|\vec{C}\right| = 2$

b. $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{3}, \left|\vec{B}\right| = 3, \left|\vec{C}\right| = 2$

c. $\left|\vec{A}\right| = 1, \left|\vec{B}\right| = \sqrt{3}, \left|\vec{C}\right| = 2\sqrt{3}$

d. $\left|\vec{A}\right| = 3, \left|\vec{B}\right| = 6\sqrt{3}, \left|\vec{C}\right| = 3\sqrt{3}$

e. $\left|\vec{A}\right| = 3, \left|\vec{B}\right| = 9, \left|\vec{C}\right| = 5$

f. $\left|\vec{A}\right| = 4, \left|\vec{B}\right| = 6, \left|\vec{C}\right| = 9$

g. $\left|\vec{A}\right| = 4\sqrt{3}, \left|\vec{B}\right| = 8, \left|\vec{C}\right| = 4$

h. $\left|\vec{A}\right| = 5\sqrt{3}, \left|\vec{B}\right| = 5, \left|\vec{C}\right| = 10$

gambarkan vektor posisi $\vec{R}$, sudut θ_R dan $\left|\vec{R}\right|$

3.Sebuah resistor, kapasitor, dan induktor dihubungkan secara seri dengan sebuah sumber tegangan (arah-arah vektor posisi ditunjukkan oleh gambar di bawah). Jika tegangan-tegangan efektif yang melalui komponen-komponen sirkuit tersebut adalah

(a) V_R = 5 V, V_L = 8 V, dan V_C = 6 V,

(b) V_R = 5 V, V_L = 10 V, dan V_C = 15 V

(c) V_R = 5 V, V_L = 15 V, dan V_C = 10 V

(d) V_R = 6 V, V_L = 4 V, dan V_C = 7 V

(e) V_R = 4 V, V_L = 9 V, dan V_C = 5 V

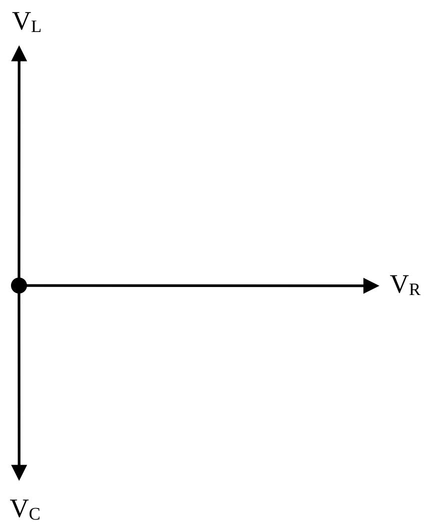
(f) V_R = 3 V, V_L = $3\sqrt{3}$ V, dan V_C = $6\sqrt{3}$ V

(g) V_R = 3 V, V_L = $6\sqrt{3}$ V, dan V_C = $3\sqrt{3}$ V tentukan tegangan efektif dari sumber tegangan dan sudut fase sirkuit tersebut!

Catatan: Tegangan efektif sumber tegangan $V = \sqrt{V_R{}^2 + (V_L - V_C)^2}$

$\tan\phi = \dfrac{V_L - V_C}{V_R}$, ϕ adalah sudut fase sumber tegangan.

Vektor posisi V_R, V_L, dan V_C ditunjukkan oleh gambar 5.7.3 berikut.



Gambar 5.7.3

4. Misalkan **P = A + B + C,** dan **Q** adalah vektor lain sedemikian sehingga **P + Q = 0** (vektor nol). Tentukan **P** dan **Q**, jika diketahui: (TH).
   (a) |**A**| **= 9** membentuk sudut 30^0 “leading” ; |**B**| **= 6** membentuk sudut 90^0 “leading”; |**C**| **= 12** membentuk sudut 60^0 “lagging”,
   (b) |**A**| **= 8** membentuk sudut 45^0 “leading”; |**B**| **= 6** membentuk sudut 90^0 “leading”; |**C**| **= 4** membentuk sudut 60^0 “lagging”,
   (c) |**A**| **= 3** membentuk sudut 60^0 “leading”; |**B**| **= 9** membentuk sudut 0^0; |**C**| **= 6** membentuk sudut 90^0 “lagging”,
   (d) |**A**| **= 8** membentuk sudut 75^0 leading; |**B**| **= 12** membentuk sudut 0^0; |**C**| **= 16** membentuk sudut 45^0 “lagging”,

(e) |**A**| **= 4** membentuk sudut 90^0 leading ; |**B**| **= 8** membentuk sudut 30^0 lagging ; |**C**| **= 10** membentuk sudut 75^0 "lagging",

(f) |**A**| **= 3** membentuk sudut 30^0 leading ; |**B**| **= 9** membentuk sudut 90^0 leading ; |**C**| **= 12** membentuk sudut 60^0 "lagging",

(g) |**A**| **= 8** membentuk sudut 15^0 leading; |**B**| **= 12** membentuk sudut 90^0 leading ; |**C**| **= 16** membentuk sudut 60^0 "lagging",

(h) |**A**| **= 3** membentuk sudut 25^0 leading; |**B**| **= 9** membentuk sudut 90^0 leading; |**C**| **= 6** membentuk sudut 75^0 "lagging",

(i) |**A**| **= 5** membentuk sudut 0^0 ; |**B**| **= 15** membentuk sudut 90^0 leading; |**C**| **= 10** membentuk sudut 75^0 "lagging",

(j) |**A**| **= 10** membentuk sudut 30^0; |**B**| **= 15** membentuk sudut 75^0 leading; |**C**| **= 20** membentuk sudut 60^0 "lagging",

(k) |**A**| **= 12** membentuk sudut 10^0 leading; |**B**| **= 4** membentuk sudut 75^0 leading; |**C**| **= 8** membentuk sudut 35^0 "lagging",

(l) |**A**| **= 30** membentuk sudut 15^0 leading; |**B**| **= 40** membentuk sudut 15^0 lagging; |**C**| **= 20** membentuk sudut 90^0 "lagging",

(m) |**A**| **= 15** membentuk sudut 20^0 leading; |**B**| **= 10** membentuk sudut 15^0 lagging; |**C**| **= 20** membentuk sudut 90^0 "lagging",

(n) |**A**| **= 20** membentuk sudut 30^0 lagging ; |**B**| **= 25** membentuk sudut 90^0 leading ; |**C**| **= 15** membentuk sudut 60^0 "lagging ",

(o) |**A**| **= 25** membentuk sudut 30^0 lagging; |**B**| **= 10** membentuk sudut 90^0 leading ; |**C**| **= 15** membentuk sudut 60^0 "lagging ",

(p) |**A**| **= 14** membentuk sudut 30^0 leading ; |**B**| **= 35** membentuk sudut 180^0 ; |**C**| **= 21** membentuk sudut 30^0 "lagging ",

(q) |**A**| **= 50** membentuk sudut 15^0 leading ; |**B**| **= 100** membentuk sudut 180^0 ; |**C**| **= 150** membentuk sudut 15^0 "lagging ",

(r) |**A**| **= 7** membentuk sudut 30^0 leading ; |**B**| **= 14** membentuk sudut 150^0 leading; |**C**| **= 21** membentuk sudut 150^0 "lagging ",

(s) |**A**| **= 40** membentuk sudut 150^0 leading ; |**B**| **= 80** membentuk sudut 0^0 ; |**C**| **= 60** membentuk sudut 150^0 "lagging ",

(t) |**A**| **= 30** membentuk sudut 150^0 leading ; |**B**| **= 60** membentuk sudut 0^0 ; |**C**| **= 120** membentuk sudut 150^0 “lagging ”,

(u) |**A**| **= 25** membentuk sudut 125^0 leading ; |**B**| **= 50** membentuk sudut 0^0 ; |**C**| **= 75** membentuk sudut 150^0 “lagging”,

(v) |**A**| **= 35** membentuk sudut 135^0 leading to; |**B**| **= 70** membentuk sudut 60^0 leading ; |**C**| **= 105** membentuk sudut 60^0 “lagging ”,

(w) |**A**| **= 60** membentuk sudut 110^0 leading; |**B**| **= 90** membentuk sudut 0^0 ; |**C**| **= 45** membentuk sudut 115^0 “lagging ”,

(x) |**A**| **= 50** membentuk sudut 150^0 leading to; |**B**| **= 125** membentuk sudut 60^0 leading ; |**C**| **= 75** membentuk sudut 120^0 “lagging ”,

(y) |**A**| **= 150** membentuk sudut 120^0 leading ; |**B**| **= 175** membentuk sudut 45^0 leading; |**C**| **= 100** membentuk sudut 60^0 “lagging ”,

(z) |**A**| **= 100** membentuk sudut 120^0 leading; |**B**| **= 200** membentuk sudut 30^0 lagging; |**C**| **= 250** membentuk sudut 135^0 “lagging ”,

BAB 6

FUNGSI TRIGONOMETRI

Materi Pembelajaran

6.1 Pendahuluan

6.2 Mengukur Sudut

6.3 Nilai Fungsi Pada Kwadran

6.4 Teorema *Phytagoras*

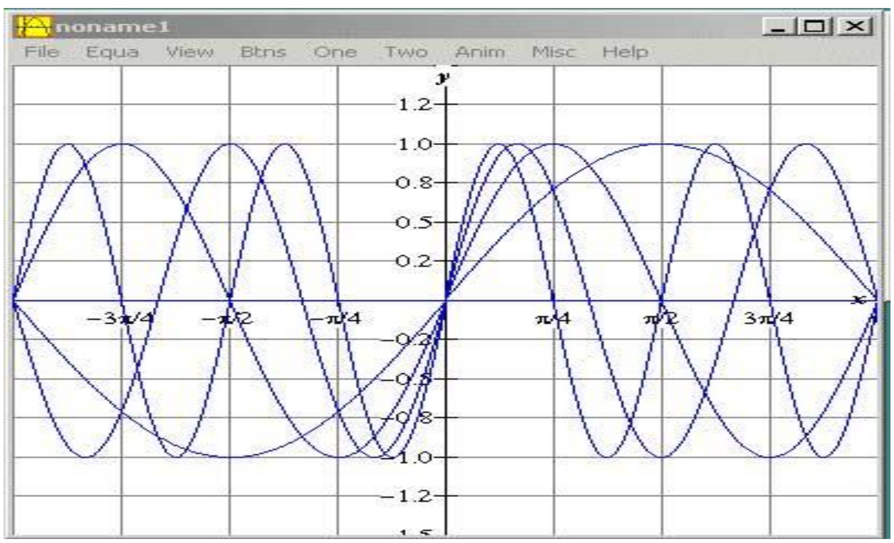
6.5 Grafik Fungsi Trigonometri

6.6 Periode

6.7 Leading and Lagging Angle

6.8 Amplitudo

6.9 Phasor, Waktu Periodik dan Frekuensi



Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini Mahasiswa diharapkan mampu:

- Memahami pengertian Fungsi Trigonometri,

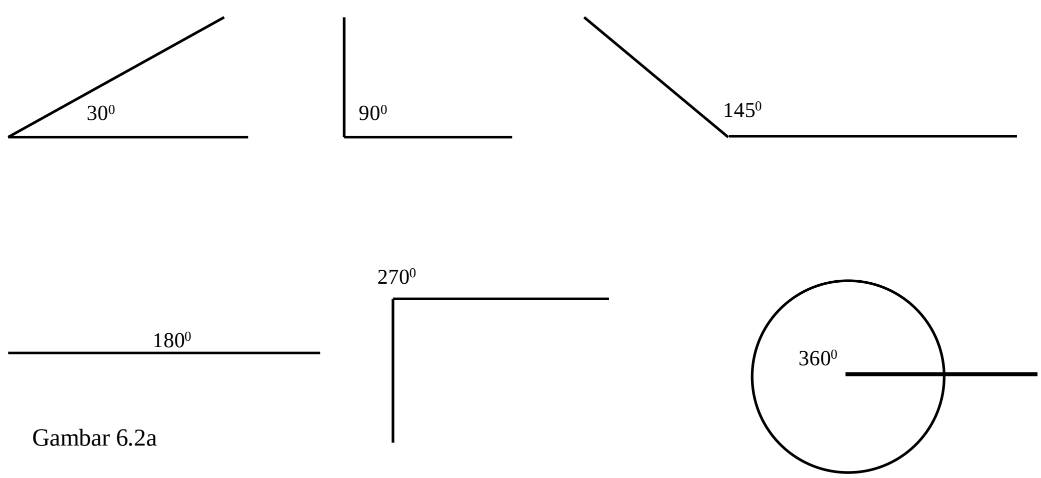
- Menerapkan konsep-konsep Fungsi Trigonometri untuk menyelesaikan masalah-masalah keteknikan, khususnya masalah teknik listrik

6.1 Pendahuluan

Sejauh ini kita telah mempelajari berbagai fungsi serta operasinya, diantaranya adalah fungsi trigonometri. Jika yang kita pelajari selama ini baru terbatas pada pembicaraan fungsi dalam lingkup matematika, maka pada bab ini pembahasan akan dikembangkan pada berbagai hal, khususnya hubungan fungsi trigonometri dengan kuat arus dan tegangan listrik Sehingga pengertian-pengertian di luar matematika seperti amplitudo, sudut fase, frekwensi dan periode diperlukan untuk mendukung pembicaraan bab ini.

6.2 Mengukur Sudut

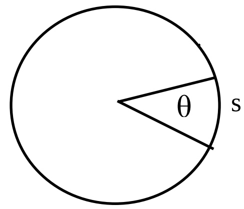
Dalam kehidupan sehari-hari, sudut dinyatakan dalam satuan derajad. Dimana 360^0 ekivalen dengan satu putaran penuh, sedangkan sudut 90^0 menggambarkan sudut siku-siku yang senilai dengan ¼ putaran penuh. Gambar 6.2a memberikan ilustrasi sudut-sudut tersebut.



Gambar 6.2a

Dalam pengukuran sudut, dapat juga digunakan satuan *radian* (rad). Sudut yang dibentuk oleh juring bersudut θ (theta), pada lingkaran berjari-jari *r*, dan panjang busur *s* adalah

$$\theta = \frac{panjang\ busur}{jari\text{-}jari} = \frac{s}{r}$$



Gambar 6.2b

Karena keliling lingkaran berjari-jari r adalah 2πr, maka 2π menggambarkan satu putaran penuh. Sehingga $360^0 = 2\pi$ rad atau $180^0 = \pi$ rad.

Ini berarti kita dapat mengkonversikan satuan derajad ke satuan radian dengan perhitungan yang ekivalen dengan nilai tersebut, yaitu

$$\theta(\text{rad}) = \theta(^0) \times \frac{\pi(\text{rad})}{180^0} = \theta(^0) \times 0.01745\,\text{rad}/^0 \ \text{ dan}$$

$$\theta(^0) = \theta(\text{rad}) \times \frac{180^0}{\pi\ \text{rad}} = \theta(\text{rad}) \times 57.30^0\ /\ \text{rad}$$

Sudut sebesar 1 radian sama nilainya dengan sudut 57.30^0

Contoh 1 Nyatakan sudut 7^0 dalam radian

$$\theta = 7^0 \times 0.01745\ \text{rad}/\ ^0 = 0.12\ \text{rad}$$

Contoh 2 Nyatakan sudut 3.5 rad dalam derajad.

$$\theta = 3.5\ \text{rad} \times 57.3\ \text{rad}/\ ^0 = 200.55^0$$

Contoh 3 Nyatakan sudut 90^0 dalam radian

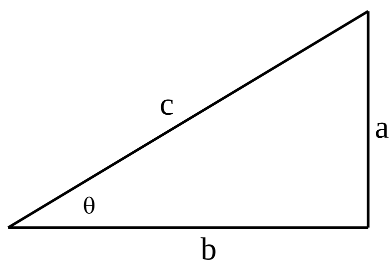
$$\theta = 90^0 \times \frac{\pi\ \text{rad}}{180^0} = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Contoh 4 Nyatakan sudut 3π/2 rad dalam derajad.

$$\theta = \frac{3\pi}{2}\text{rad} \times \frac{180^0}{\pi\ \text{rad}} = 270^0$$

6.3 Fungsi Trigonometri

Segitiga siku-siku *(right triangle)* adalah sebuah segitiga yang kedua sisinya saling tegak lurus. Sisi yang berhadapan dengan sudut siku-siku disebut hipotenusa (*hypotenuse)*. (Gambar 6.3)



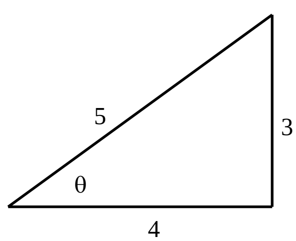
$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c}$$

$$tg\theta = \frac{a}{b}$$

Gambar 6.3

Contoh 5 Tentukan sin θ, cos θ, dan tg θ segitiga di bawah ini!



Penyelesaian

$$\sin\theta = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$tg\theta = \frac{3}{4} = 0.75$$

Invers dari suatu fungsi trigonometri adalah suatu sudut yang nilai fungsinya telah diketahui. Sehingga invers dari sin θ adalah θ.

Tulisan berikut akan memberikan gambaran yang lebih jelas.

Jika sin $\theta = y$, maka θ = arc sin $y = \sin^{-1} y$.

Jika cos $\theta = x$, maka θ = arc cos $x = \cos^{-1} x$

Jika tg θ dan $\gamma = z$, maka z = arc tg $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\theta$

Contoh 6 Tentukan α, β, dan γ jika sin α = 0.35, cos β = –0.17, dan tg γ = 0.75 pada [0, π]

α = arc sin 0.35 = 20.49^0,

β = arc cos (–0.17) = 99.79^0,

$\gamma = \mathrm{tg}^{-1}\ 0.75 = 36.87^0$

6.4 Nilai Fungsi Pada Kuadran

Ada kalanya kita menghitung nilai fungsi trigonometri yang sudut-sudutnya lebih besar dari 90^0. Sebelum kita menentukan nilai-nilai tersebut, diperlukan pengertian kwadran (domain). Dalam hal ini satu putaran penuh dibagi menjadi empat kwadran, kwadran I dengan domain [0, 90^0], kwadran II dengan domain (90^0, 180^0], kwadran III dengan domain (180^0, 270^0], dan kwadran IV dengan domain (270^0, 360^0]. Adapun nilai-nilai fungsinya ditunjukkan oleh tabe 6.4

Tabel 6.4

Kwadran I	Kwadran II	Kwadran III	Kwadran IV
sin θ	sin (180^0– θ) = sin θ	sin (180^0 + θ) = – sin θ	sin (–θ) = – sin θ
cos θ	cos (180^0– θ) = – cos θ	cos (180^0 + θ) = – cos θ	cos (–θ) = cos θ
tg θ	tg (180^0– θ) = – tan θ	tg (180^0 + θ) = tan θ	tg (–θ) = – tan θ
ctg θ	ctg (180^0– θ) = – tan θ	ctg (180^0 + θ) = tan θ	ctg (–θ) = – tan θ

Contoh 7 Jika sin 30^0 = ½ , tentukan sin 150^0, sin 210^0, dan sin (–30^0)

sin 150^0 = sin (180^0 – 30^0) = sin 30^0 = ½

$\sin 210^0 = \sin (180^0 + 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$

$\sin (-30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$

Contoh 8 Jika $\text{tg } 60^0 = \sqrt{3}$, tentukan $\text{tg } 120^0$, $\text{tg } 240^0$, dan $\text{tg } (-60^0)$

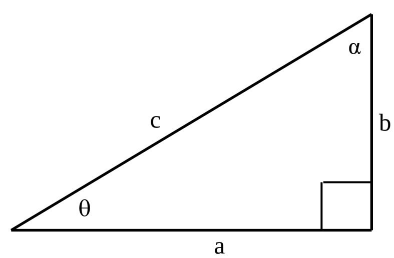
$\text{tg } 120^0 = \text{tg}(180^0 - 60^0) = -\text{tg } 60^0 = -\sqrt{3}$

$\text{tg } 240^0 = \text{tg } (180^0 + 60^0) = \text{tg } 60^0 = \sqrt{3}$

$\text{tg } (-60^0) = -\text{tg } 60^0 = -\sqrt{3}$

6.4 Teorema *Phytagoras*

Teorema *Phytagoras* merupakan teorema yang bermanfaat ketika dihadapkan dengan segi tiga siku-siku. Teorema tersebut menyatakan bahwa jumlah kuadrat sisi pendek dengan kuadrat sisi panjang sama dengan kuadrat sisi miringnya (*hypotenuse)*. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar 6.4.



Gambar 6.4

Contoh 9 Tentukan sisi-sisi a, dan b pada gambar 6.4 dan sudut α jika c = 8 dan θ = 30^0.

Perhitungan kita mulai dari sisi a.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin 30^0 = \frac{a}{8} \Leftrightarrow a = 8 \times \sin 30^0 = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

Untuk menentukan sisi b kita dapat menghitung lewat dua cara, yaitu

$$\cos\theta = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \times \cos\theta = 8 \times \cos 30^0 = 8 \times 0.866 = 6.93$$

Cara lain, kita dapat menggunakan teorema Pythagoras sebagai berikut:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2$$

Sehingga $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6.93$

Karena $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$, maka $\alpha = \arcsin 0.5 = 30^0$

Contoh 10 Tentukan c, θ dan α pada gambar 6.4 jika $a = 7$, dan $b = 10$.

Dengan teorema Phytagoras didapat c,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{49 + 100} = \sqrt{149} = 12.2$$

Untuk memperoleh θ,

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{7}{9} = 0.7$$

$$\theta = tan^{-1} 0.7 = 35^0$$

Karena $\theta = 35^0$, maka $\alpha = 90^0 - 35^0 = 55^0$.

Contoh 11 Tentukan b, θ dan α pada gambar 6.4 jika $a = 3$, dan $c = 9$.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{81 - 9} = \sqrt{72} = 8.5$$

$$\sin\theta = \frac{a}{c} = \frac{3}{9} = 0.333$$

$$\theta = arc\ sin\ 0.333 = 19^0$$

$$\alpha = 90^0 - \theta = 90^0 - 19^0 = 71^0.$$

Latihan 6.1

1. Ekspresikan sudut-sudut berikut dalam radian:

   (a) 23.5^0 (b) 80.4^0 (c) 120^0 (d) 300^0 (d) 1½ put. (e) 2½ put

2. Ekspresikan sudut-sudut berikut dalam derajad:

   (a) 0.1 rad (b) 0.5 rad (c) 4.3 rad (d) π/3 rad (e) 3π rad

3. Ekspresikan sudut-sudut berikut dalam decimal

(a) $50^0 6' 12''$ (b) $140^0 20' 30''$ (c) $225^0 50' 55''$

4. Ekspresikan sudut-sudut berikut dalam derajad, menit, dan detik

(a) 1.75^0 (b) 15.63^0 (c) 70.81^0 (d) 165.23^0 (e) 320.270^0

6.5 Grafik Fungsi Trigonometri

A. Grafik Fungsi Sinus

Salah satu metode pembuatan grafik fungsi trigonometri adalah dengan menyatakan harga-harga pada titik-titik sesuai interval tertentu dan selanjutnya menghubungkan titik-titik tersebut secara kontinu. Grafik-grafik berikut dibuat atas dasar tabel (1) dan (2) dengan lebar interval 15^0 dan 30^0.

i) y = sin A

A (^{0})	0	15	30	45	60	75
sin A	0	0,259	0,500	0,707	0,866	0,966

90	105	120	135	150	165	180
1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0

195	210	225	240	255	270	285
-0,259	-0,500	-0,707	-0,866	-0,966	-1,000	-0,966

300	315	330	345	360
-0,866	-0,707	-0,500	-0,259	0

ii) y = sin 2A

A (^{0})	0	15	30	45	60	75
2A	0	30	60	90	120	150
sin 2A	0	0,500	0,866	1,000	0,866	0,500

90	105	120	135	150	165	180
180	210	240	270	300	330	360
0	-0,500	-0,866	-1,000	-0,866	-0,500	0

195	210	225	240	255	270	285
390	420	450	480	510	540	570
0,500	0,866	1,000	0,866	0,500	0	-0,500

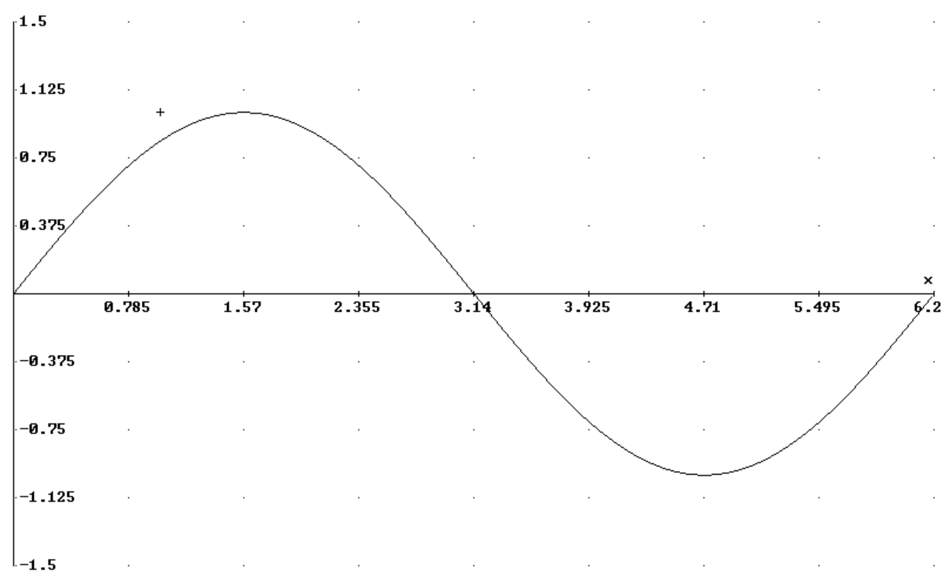
300	315	330	345	360
600	630	660	690	720
-0,866	-1,000	-0,866	-0,500	0

iii) y = sin ½ A

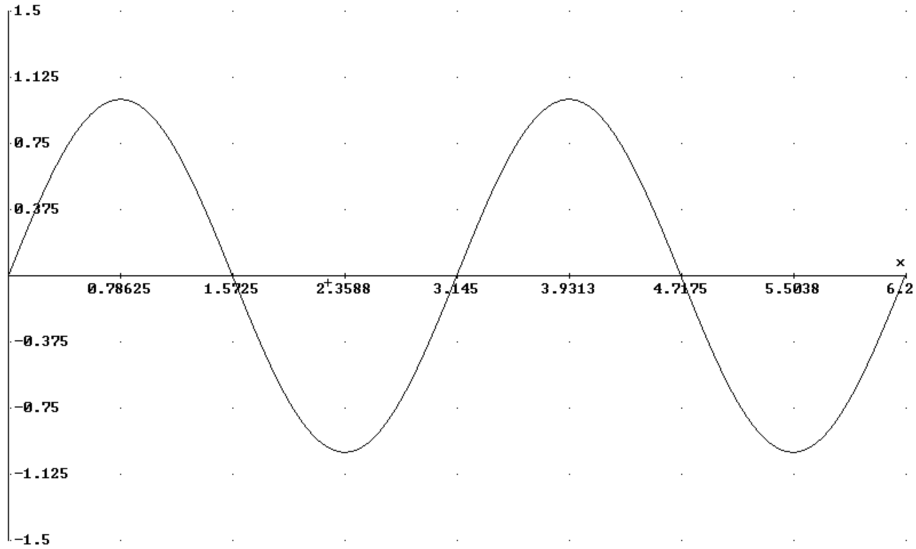
A (^{0})	0	30	60	90	120	150
½ A	0	15	30	45	60	75
sin ½ A	0	0,259	0,500	0,707	0,866	0,966

180	210	240	270	300	330	360
90	105	120	135	150	165	180
1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0

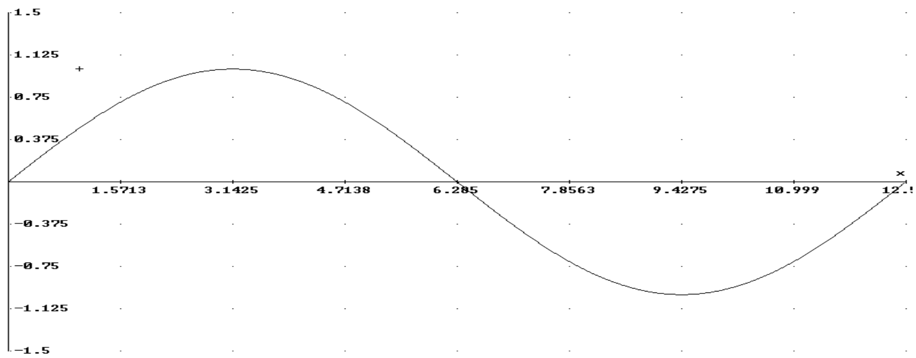
Grafik fungsi y = sin x, y = sin 2x dan y = sin ½ x dapat dilihat pada gambar (6.5.a), (6.5.b) dan (6.5.c). Selanjutnya perbandingan mengenai ketiga grafik tersebut dapat dilihat pada gambar (6.5.d).



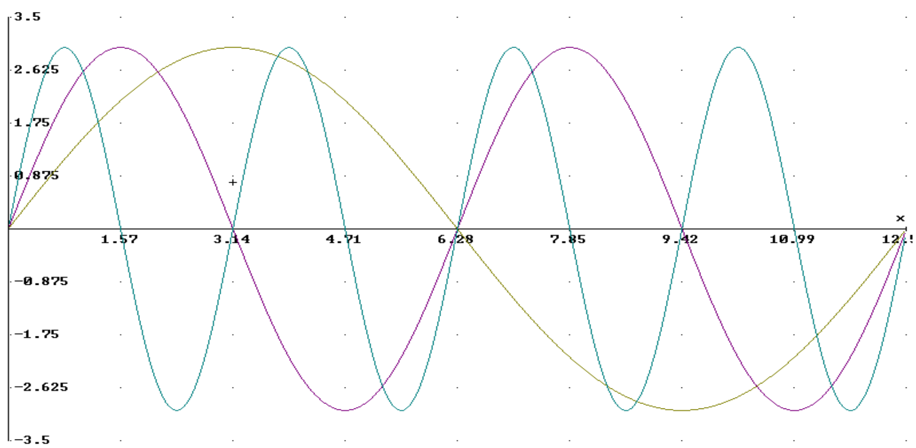
Gambar 6.5.a Grafik fungsi y = sin x



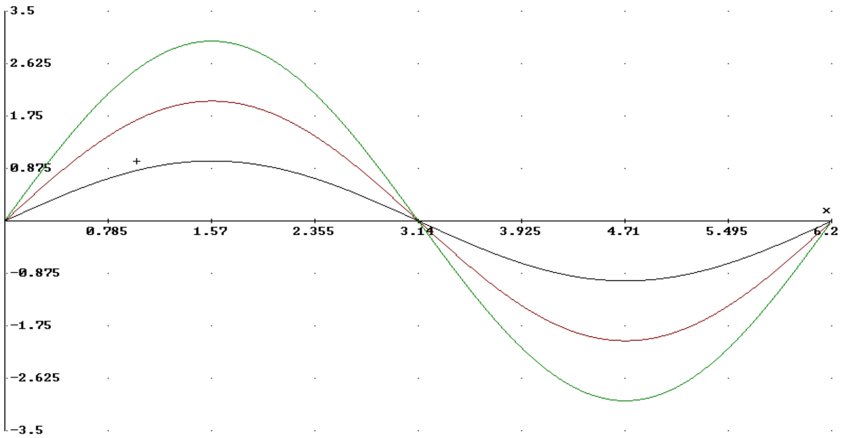
Gambar 6.5.b Grafik fungsi y = sin 2x



Gambar 6.5.c Grafik fungsi y = sin ½ x



Gambar 6.5.d Grafik fungsi y = 3 sin ½ x, y = 3 sin x, dan y = 3 sin (2x)



Gambar 6.5.e Grafik fungsi y = sin x, y = 2 sin x, dan y = 3 sin x

B. Grafik Fungsi Cosinus

(i) y = cos A

A (^{0})	0	15	30	45	60	75
cos A	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259

90	105	120	135	150	165	180
0	-0,259	-0,500	-0,707	-0,866	-0,966	-1,000

195	210	225	240	255	270	285
-0,966	-0,866	-0,707	-0,500	-0,259	0	0,259

300	315	330	345	360
0,500	0,707	0,866	0,966	1,000

(ii). y = cos 2A

A (^{0})	0	15	30	45	60	75
2A	0	30	60	90	120	150
cos 2A	1,000	0,866	0,500	0	-0,500	-0,866

90	105	120	135	150	165	180
180	210	240	270	300	330	360
-1,000	-0,866	-0,500	0	0,500	0,866	1,000

195	210	225	240	255	270	285
390	420	450	480	510	540	570
0,866	0,500	0	-0,500	-0,866	-1,000	-0,866

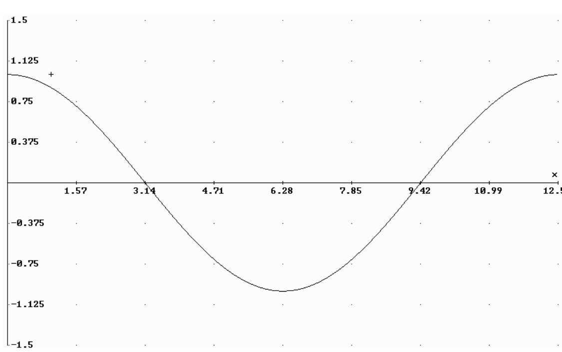
300	315	330	345	360
600	630	660	690	720
-0,500	0	0,500	0,866	1,000

iii) y = cos ½ A

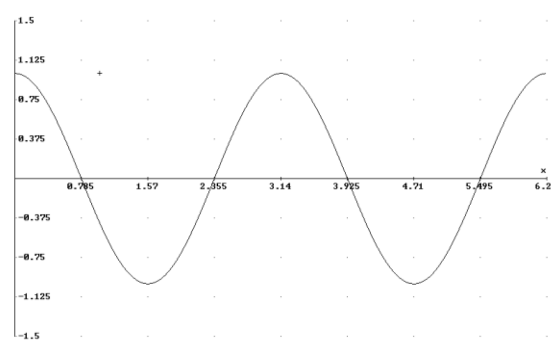
A (^{0})	0	30	60	90	120	150
½ A	0	15	30	45	60	75
sin ½ A	1,000	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259

180	210	240	270	300	330	360
90	105	120	135	150	165	180
0	-0,259	0,500	-0,707	-0,866	-0,966	-1,000

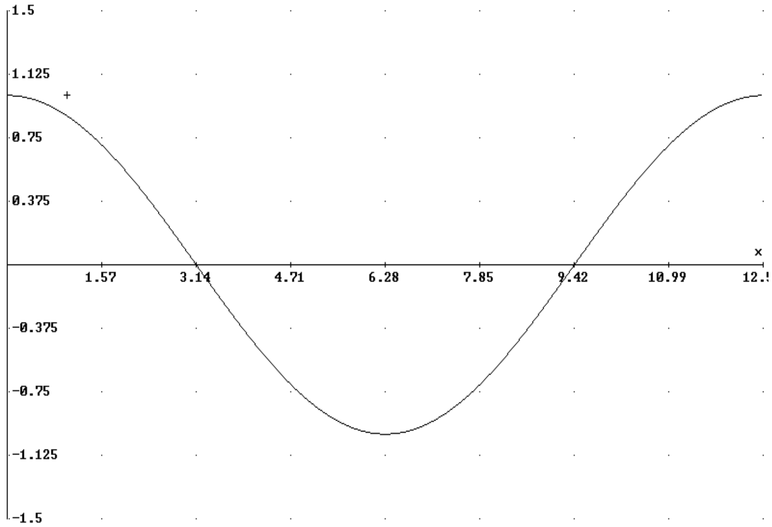
Grafik fungsi y = cos x, y = cos 2x dan y = cos ½ x dapat dilihat pada gambar (6.5.f), (6.5.g) dan (6.5.h). Gambar 6.5.i menunjukkan berbagai fungsi cosinus dengan amplitudo yang sama dan periode (waktu periodik) yang berbeda, sebaliknya gambar 6.5.j menunjukkan berbagai fungsi cosinus dengan amplitude berbeda dan periode (waktu periodik) yang sama.



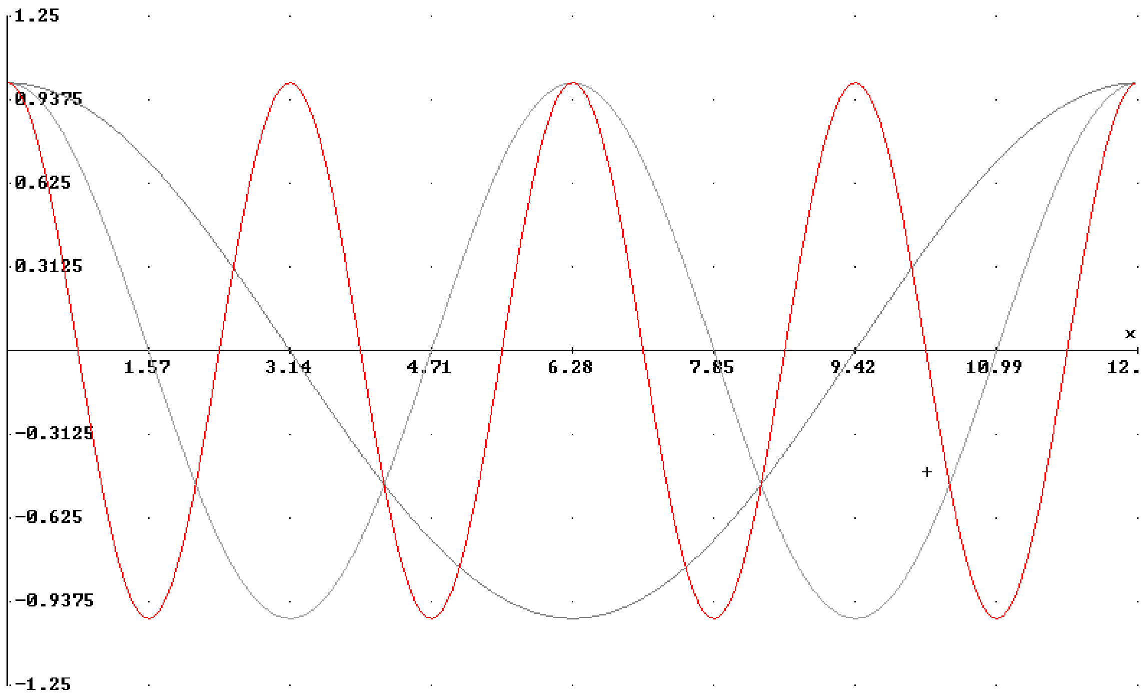
Gambar 6.5.f Grafik fungsi y = cos (x)



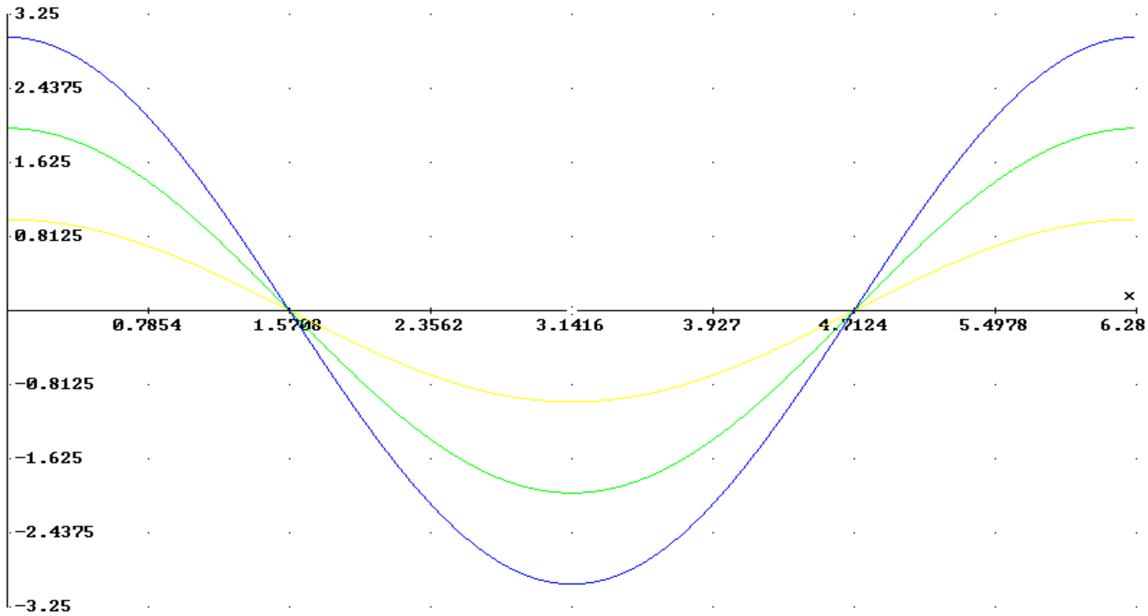
Gambar 6.5.g Grafik fungsi y = cos (2x)



Gambar 6.5.h Grafik fungsi y = cos (½ x)



Gambar 6.5.i Grafik fungsi y = cos x, y = cos 2x, dan y = cos ½ x



Gambar 6.5.i   Grafik fungsi y = cos x, y = 2 cos x, dan y = 3 cos x

6.6 Periode

Jika diperhatikan, harga-harga fungsi sinus dan cosinus akan kembali pada harga tertentu setelah suatu interval tertentu. Maka fungsi yang demikian disebut sebagai fungsi periodik dan interval tertentu tersebut disebut sebagai *periode*.

Pada fungsi y = sin A dan y = cos A harga akan sama (berulang) setelah 360^0 atau 2π. Maka fungsi y = sin A dan y = cos A dikatakan punya periode 360^0. Demikian juga fungsi y = sin 2A dan y = cos 2A akan akan kembali pada harga semula setelah 180^0 atau π kemudian. Sehingga fungsi y = sin 2A atau fungsi y = cos 2A dikatakan punya periode 180^0 atau π. Dan secara sama periode dari fungsi-fungsi y = sin ½ A dan y = cos ½ A adalah 720^0 atau 4π

Secara umum fungsi y = sin pA atau y = cos pA mempunyai periode $\boldsymbol{P = 2\pi/p}$.

6.7 Leading and Lagging Angle

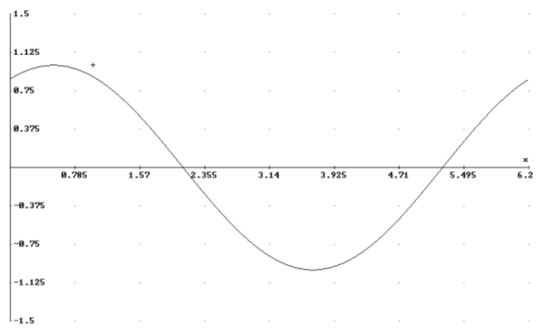
Grafik fungsi y = sin (A ± α) dan y = cos (A ± α)

Grafik fungsi y = sin A selalu melalui 0. Bagaimana dengan grafik y = sin (A + α)?

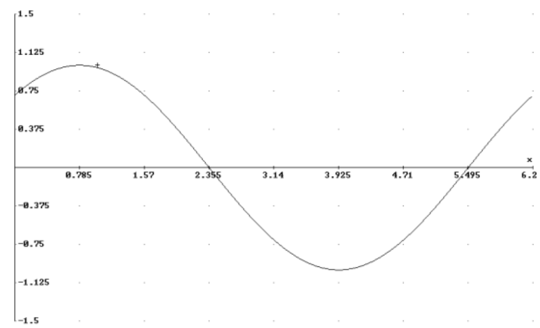
Grafik fungsi y = sin (A + α) jika digambar akan sejajar dengan y = sin A dengan jarak

α Untuk selanjutnya α disebut sebagai sudut fase (*phase angle*). Jika fase sudut positip, yaitu $\alpha > 0$, maka grafik mendahului y = sin A. Jika sudut fase negatip, yaitu $\alpha < 0$ maka y = sin (x + α) mengikuti y = sin A.

Grafik fungsi y = sin (A ± α) dan y = cos (A ± α) , dicontohkan oleh fungsi y = sin (A + 60^0) dan y = cos (A − 45^0) seperti gambar (6.5.j) dan (6.5.k) berikut ini !



Gambar 6.5.j Grafik fungsi y = sin (A + 60^0)



Gambar 6.5.k Grafik fungsi y = cos (A − 45^0)

6.8 Amplitudo

Amplitudo adalah suatu bilangan yang menyatakan simpangan terbesar dari sebuah gelombang yang diukur dari titik setimbang. Amplitudo dari fungsi y = sin A, y = sin 2A, dan y = sin ½ A adalah 1. Demikian juga fungsi y = cos A, y = cos 2A dan y = cos ½ A mempunyai amplitudo 1. Bagaimana dengan fungsi y = 3 sin A, y = 3 sin 2A dan y = 3 sin ½ A ? Fungsi-fungsi ini mempunyai amplitudo 3, karena harga terbesar dari simpangannya adalah 3. Secara umum fungsi-fungsi y = K sin pA atau y = K cos pA mempunyai amplitudo K.

6.9 Phasor, Waktu Periodik dan Frekuensi

Pada gambar (6.9), OA menyatakan sebuah vektor yang berputar bebas mengitari titik O berlawanan arah jarum jam dengan kecepatan sudut ω rad/dt. Maka vektor yang berputar tersebut disebut sebagai *phasor*.

Setelah waktu t detik vektor OA akan berputar menempuh ωt radian (dalam gambar ditunjukkan oleh AOB). Jika garis BC diproyeksikan tegak lurus garis OA sebagai ditunjukkan gambar, maka:

$$\sin \omega t = \frac{BC}{OB}$$

sehingga $BC = OB \sin \omega t$

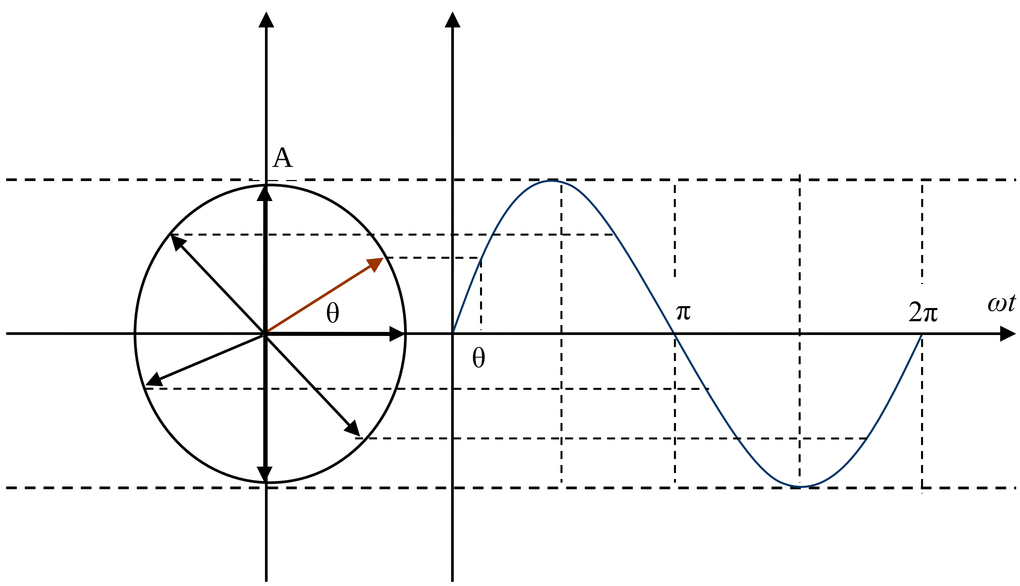
Apabila semua komponen vertikal yang diproyeksikan dinyatakan sebagai y dengan variabel bebas ωt, maka y akan membentuk sebuah gelombang sinus sebagai ditunjukkan oleh gambar (6.9.a).

a. Waktu Periodik

Waktu periodik adalah waktu yang diperlukan oleh vektor OA untuk menempuh satu kali putar. Sehingga jika direpresentasikan dalam grafik, waktu periodik adalah waktu yang diperlukan untuk menempuh satu gelombang penuh (dalam gambar waktu periodik adalah 2π radian). Jika waktu periodik dinotasikan sebagai T, maka

$2\pi = \omega T$ atau

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



Gbr 6.9a

b. Frekwensi

Frekwensi yang ditulis dengan f didefinisikan sebagai jumlah putaran perdetik.

$$f = \frac{\text{jumlah putaran}}{\det ik} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\,Hz$$

c. Kecepatan Sudut

Kecepatan sudut : $\omega = 2\pi$ f

Secara umum jika diberikan fungsi periodik sinus sebagai

$y = A \sin (\omega t + \alpha)$, maka:

i) amplitudo = A

ii) kecepatan sudut = ω radian

iii) waktu periodik, T = $(2\pi)/\omega$ detik

iv) frekwensi f = $\omega/ (2\pi)$

Contoh 6.9

1. Sebuah arus listrik (a.c.) dalam sebuah rangkaian, setelah waktu t memenuhi persamaan $i = 75{,}0 \sin (100\pi\, t + 0{,}320)$ amper

Tentukan:

a) amplitudo, waktu periodik, frekwensi dan sudut fase

b) harga arus saat t = 0, dan saat t = 0,006 dt,

c) waktu, pada saat arus mencapai 50,0 amper yang pertama,

d) waktu pada saat arus mencapai maksimum yang pertama.

<u>Penyelesaian:</u>

a. amplitudo, $A = 75{,}0$ amper

waktu periodik $T = 2\pi/\omega = 2\pi/100\pi = 0{,}02$ dt

frekwensi $f = 1/T = 1/0{,}02 = 50$ Hz

sudut fase $\alpha = 0{,}320$ radian (atau $18^0\ 20^1$) mendahului $75{,}0 \sin 100\pi$ t.

b. Pada saat t = 0, $i = 75{,}0 \sin (0 + 0{,}320)$

$i = 75{,}0 \sin 0{,}320$

$= 75{,}0 \sin 18^0\ 20^1$

$= 75,0\ (0,3146)$

$= 23,6$ amper

c. Pada saat $t = 0,006$ dt,

$i = 75,0 \sin [100\pi\ (0,006) + 0,320]$

$= 75,0 \sin [0,6 + 0,320]$

$= 75,0 \sin 2,205$

$= 75,0 \sin (126,34)^0$

$= 75,0\ (0,8055)$

$=60,4$ amper

d. Pada saat $i = 50,0$ amper, maka:

$50,0 = 75,0 \sin (100\pi\ t + 0,320)$

$50,0/75,0 = \sin (100\pi\ t + 0,320)$

$0,6667 = \sin (100\pi\ t + 0,320)$

$(100\pi\ t + 0,320) = \arcsin (0,6667) = 41^1\ 49^0$

$= 0,7298$ radian

$100\pi\ t = 0,7298 – 0,320$

$= 0,4098$

Jadi $t = 0,4098/\ 100\pi = 0,0013$ dt.

e. Ketika i maksimum, i = amplitudo = 75,0 amper

$75,0 = 75,0 \sin (100\pi\ t + 0,320)$

$1 = \sin (100\pi\ t + 0,320)$

$(100\pi\ t + 0,320) = \arcsin 1$

$= 90^0$ atau $\pi/2$

$= 1,5708$

$100\pi\ t = 1,5708 - 0,320$

$= 1,2508$

Jadi $t = 1,2508/\ (100\pi) = 0,004$ dt.

2. Sebuah tegangan listrik (a.c.) pada waktu t diberikan oleh $v = 60 \sin (200\ \pi t - 0,25)$ volt.

Tentukan:

a) Amplitudo, waktu periodik, frekwensi dan sudut fase.

b) Tegangan saat t = 0

c) Waktu t, saat V = 0

d) Waktu t, saat pertama kali tegangan mencapai maksimum,

e) Waktu t, saat kedua kali tegangan mencapai maksimum,

f) Waktu t, saat ketiga kali tegangan mencapai maksimum,

g) Gambarkan grafiknya

Penyelesaian: ?

Latihan 6

1 Tentukan amplitudo dan waktu periodik gelombang fungsi berikut ini!

a. y = sin t   b. y = 2 sin 3t   c. y = 3 sin 5t   d. y = 5 sin 7t

e. x = 9 sin ½ t   f. x = 7 sin ¼ t   g. x = 5 sin ¾ t   h. x = 3 sin 4t

i. $I = 10\sin(t - 30^0)$ j. $I = 20\sin(3t + 45^0)$ k. $I = 20\sin(5t + 75^0)$

l. $I = 35\sin(2\pi t + 30^0)$ m. $I = 45\sin(5\pi t - 75^0)$ n. $I = 75\sin(8\pi t - 120^0)$

o. $I = 15\sin(\frac{2}{3}t + 0.21)$ p. $I = 25\sin(\frac{3}{5}t - 0.71)$ q. $I = 50\sin(\frac{3}{4}t - 0.85)$

r. $I = 150\sin(\frac{2}{5}\pi t + 60^0)$ s. $I = 250\sin(\frac{3}{8}\pi t - 120^0)$ t. $I = 350\sin(\frac{3}{10}\pi t - 60^0)$

u. $V = 450\sin(t + 0.25)$ v. $V = 900\sin(\frac{2}{5}t - 0.350)$ w. $V = 1300\sin(\frac{2}{3}t + 0.750)$

x. $V = 450\sin(2\pi t + 0.25)$ y. $V = 900\sin(4\pi t - 0.350)$ z. $V = 1300\sin(5\pi t + 0.750)$

2. Dengan mengidentifikasi amplitudo dan periode masing-masing fungsi berikut ini gambarkan grafiknya (dua putaran)!

a. y = sin 3t   b. y = 3 sin 3t   c.y = 4 sin (1/3) t

d. y = 3 cos 2t   e. y = 3 cos 4t   f. y = 4 cos (1/3)t

g. y = sin (3t + 90^0)   h.y = 3 sin (3t + 90^0)   i. y = 4 sin (1/3 t + π/2)

j. y = cos (2t − π/2)   k. y = 3 cos (4 t − π)   l. y = 4 cos (1/3 t − 3π/2)

3. Tentukan amplitudo, waktu periodik, frekwensi dan sudut fase

a. $i = 60 \sin (50\pi t + 0{,}36)$ b. $v = 25 \sin (400\pi t - 0{,}231)$

c. $y = 35 \sin (40 t - 0{,}6)$ d. $x = 10 \sin (314{,}2 t + 0{,}568)$

4. Sebuah arus sinus mempunyai harga maksimum 25 A dan frekwensi 60 Hz. Pada saat t = 0, kuat arus adalah 0. Tuliskan kuat arus i dalam bentuk $i = A \sin \omega t$.
5. Sebuah oskilasi mekanis mempunyai perpindahan maksimum 4,0 m dan frekwensi 50 Hz. Pada saat t = 0 perpindahannya adalah 120 cm. Tuliskan perpindahan tersebut dalam bentuk $A \sin (\omega t \pm \alpha)$
6. Sebuah tegangan a.c., tegangan V mempunyai waktu periodik 0,01 dt dan harga maksimum 30 volt. Pada saat t = 0, didapat V = -20 volt. Tuliskan tegangan tersebut dalam bentuk $V = A \sin (\omega t \pm \alpha)$
7. Tegangan a.c. dalam sebuah rangkaian pada sat t diberikan oleh $v = 45{,}0 \sin 50 t$. Tentukan dua waktu pertama ketika v mencapai

   a) 10,0 volt b) 25,0 volt
8. Sebuah arus dalam suatu rangkaian a.c. memenuhi persamaan

   a. $i = 50{,}0 \sin (100\pi t + 0{,}41)$ amper.

   b. $i = 75{,}0 \sin (50\pi t - 0{,}43)$ amper.

   c. $i = 100{,}0 \sin (40\pi t + 0{,}25)$ amper.

   d. $i = 200{,}0 \sin (25\pi t - 0{,}85)$ amper,

   e. $i = 350{,}0 \sin (20\pi t - 0{,}65)$ amper,

   f. $i = 400{,}0 \sin (10\pi t + 0{,}41)$ amper,

   g. $i = 700{,}0 \sin (5\pi t - 0{,}23)$ amper

   Tentukan

   a) Kuat arus saat t = 0 dt, dan saat t = 0,005 dt,
   b) Waktu t saat pertama kali arus mencapai 40,0 amper,
   c) Waktu t, saat pertama kali i mencapai 0
   d) Waktu t pada saat arus pertama kali mencapai maksimum,
   e) Waktu t saat kedua kali, dan kelima kali arus mencapai maksimum
   f) Gambarkan grafiknya, minimal satu putaran penuh!
9. Harga sesaat sebuah tegangan dalam sebuah rangkaian a.c. memenuhi persamaan

a. $V = 200{,}0 \sin(10\,t + 0{,}950)$ volt,

b. $V = 300{,}0 \sin(20\,t - 0{,}865)$ volt

c. $V = 350{,}0 \sin(25\,t + 0{,}750)$ volt,

d. $V = 400{,}0 \sin(40\,t - 0{,}654)$ volt,

e. $V = 450{,}0 \sin(50\,t + 0{,}345)$ volt

f. $V = 1300{,}0 \sin(5\,t - 0{,}271)$ volt

Tentukan

a) amplitudo, waktu periodik, frekwensi dan sudut fase

b) Tegangan saat $t = 0$ dt, dan saat $t = 0{,}01$ dt,

c) Waktu t ketika tegangan pada putaran pertama mencapai $-75{,}0$ volt

d) Waktu t ketika tegangan mencapai maksimum pertama kali

e) Waktu t ketika tegangan mencapai maksimum kedua kali, dan ke tujuh

f) Gambarkan grafiknya, minimal satu putaran penuh

BAB 7
TURUNAN

Materi Pembelajaran

7.1 Pendahuluan

7.2 Turunan Fungsi Aljabar

7.3 Turunan Fungsi Trigonometri,

7.4 Aturan Berantai

7.5 Turunan Fungsi Eksponensial dan Logaritma

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini Mahasiswa diharapkan mampu:

- Memahami Turunan,
- Menerapkan konsep-konsep Turunan untuk menyelesaikan masalah-masalah keteknikan, khususnya masalah teknik listrik

7.1 Pendahuluan

Turunan fungsi $y = f(x)$ pada titik $x = c$, yang biasa diberi notasi $f'(c)$ didefinisikan sebagai

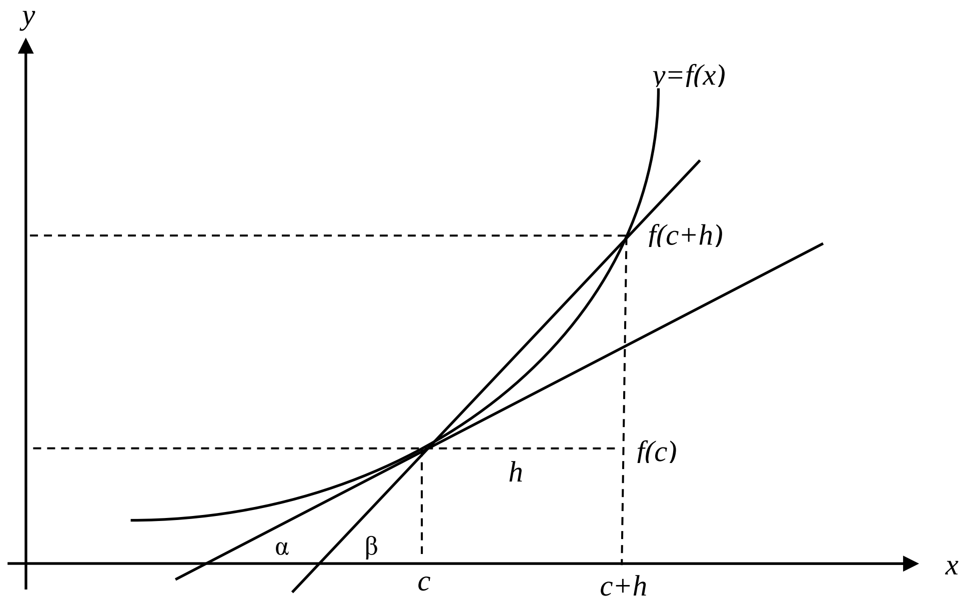
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jika harga limit ini memang ada, maka dikatakan f terdiferensialkan di c.

Secara geometris $f'(c)$ menyatakan gradient garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik c, yaitu $f'(c)$ = tg α (lihat gambar 7. a).

Secara umum turunan fungsi $y = f(x)$, adalah $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Notasi: Turunan fungsi $y = f(x)$ terhadap x dapat dinyatakan dalam berbagai symbol antara lain $\frac{d}{dx}y, \frac{dy}{dx}, D_x y, y'$, dan $f'(x)$.



Gambar 7.a

Contoh 1 Jika $f(x) = 5x - 3$, tentukan $f'(10)$.

Penyelesaian

$$f'(10) = \lim_{h \to 0} \frac{f(10+h) - f(10)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[5(10+h) - 3] - (5.10 - 3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h} = 5$$

Contoh 2 Jika $f(x) = 3x^2 + 7$, tentukan $f'(x)$ dan $f'(5)$.

Penyelesaian

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 + 7] - [3x^2 + 7]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x^2 + 2xh + h^2) + 7] - [3x^2 + 7]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} = \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x$$

$$f^1(5) = 6.5 = 30$$

7.2 Turunan Fungsi Aljabar

1. $y = k \Rightarrow y^1 = 0$, dengan k konstan

2. $y = kx^n \Rightarrow y^1 = knx^{n-1}$, k dan n konstan

   Pada nomor-nomor berikut *u, v,* dan *w* fungsi-fungsi dari *x.*

3. $y = u \pm v \Rightarrow y^1 = u^1 \pm v^1$

4. $y = u.v \Rightarrow y^1 = u^1 v + v^1 u$

5. $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y^1 = \dfrac{u^1 v - v^1 u}{v^2}$

6. $y = u^n \Rightarrow y^1 = nu^{n-1}u^1$

Catatan: Yang dimaksud dengan y^1 pada rumus di atas adalah $y^1 = \dfrac{dy}{dx}$

Contoh 3 Tentukan turunan I dari $y = 7x^5 - 5x^3 + 3x - 10$

Penyelesaian $y^1 = 7(5x^4) - 5(3x^2) + 3 - 0 = 35x^4 - 15x^2 + 3$

Contoh 4 Tentukan turunan I dari $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$

Penyelesaian $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$

$y^1 = -x^{-2} + 3(-2x^{-3}) + 2(-3x^{-4}) = -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4} = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{6}{x^4}$

Contoh 5 Tentukan turunan pertama dari $f(t) = \sqrt{5t} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{8t^2}}$

Penyelesaian $f(t) = \sqrt{5t} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{8t^2}} = \sqrt{5}t^{1/2} + \dfrac{1}{2}t^{-2/3}$

$$f'(t) = \sqrt{5}(\frac{1}{2})t^{-1/2} + \frac{1}{2}(-\frac{2}{3})t^{-5/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}t^{-1/2} - \frac{1}{3}t^{-5/3}$$

Contoh 6 Tentukan turunan I dari $v = (5t^2 - 1)^3$

Penyelesaian $v^1 = 3(5t^2 - 1)^{3-1}(10t) = 30t\,(5t^2 - 1)^2$

Contoh 7 Tentukan turunan I dari $v = (5t^2 - 1)^3\,(2t^3 + 7)^2$

Penyelesaian Misalkan P = $(5t^2 – 1)^3$, dan Q = $(2t^3 + 7)^2$

Maka $P^1 = 30t\ (5t^2 – 1)^2$, dan $Q^1 = 12t^2\ (2t^3 + 7)$

$V^1 \quad = P^1Q + Q^1P$

$= [30t\ (5t^2 – 1)^2]\ (2t^3 + 7)^2 + [12t^2\ (2t^3 + 7)]\ (5t^2 – 1)^3 = \ldots..$

Contoh 8 Tentukan turunan I dari $\theta = \dfrac{3-2t}{3+2t}$

Penyelesaian $\theta' = \dfrac{-2(3+2t)-2(3-2t)}{(3+2t)^2} = \dfrac{(-6-4t)-(6-4t)}{(3+2t)^2} = \dfrac{-12}{(3+2t)^2}$

Contoh 9 Tentukan D_xy, jika $y = \sqrt[5]{(3x^2-5x+8)^3}$

Penyelesaian $y = \sqrt[5]{(3x^2-5x+8)^3} = (3x^2-5x+8)^{3/5}$

$$D_x y = \frac{3}{5}(3x^2-5x+8)^{\frac{3}{5}-1}.(6x-5) = \frac{3}{5}(6x-5)(3x^2-5x+8)^{-\frac{2}{5}}$$

Latihan 7.2 Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut!

1. a. $y = 100$ b. $y = \pi x$ c. $y = 3x^5$ d. $y = \sqrt{9}\ x^7$ e. $f(x) = 25\ x^{10}$
2. a. $f(x) = 3x^{-2}$ b. $f(x) = \dfrac{3}{2x^5}$ c. $f(x) = \sqrt[3]{(8x^2)}$ d. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt[5]{x^3}}$
3. a. $y = 3x^5 – 5x^3 + 10$ b. $y = 5x^{-3} – 3x^{-2} + 7x – 1$ c. $y = 9x^5 – 7x^3 + 2x – 10$
4. $y = \alpha x^2 - \beta x + \gamma$, dimana α, β, dan γ adalah konstanta.
5. a. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{4}{x^5}$, b. $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{7x^5}$, c. $h(t) = \dfrac{10}{3x^9} - \dfrac{5}{2x^3} + 3x^2$
6. a. $f(x) = 2x^{1/2} + 6x^{2/3} - 5x^{-3/5}$, b. $g(x) = 5x^{\frac{3}{5}} - 3x^{\frac{2}{3}} + \pi x^{\frac{1}{2}}$
7. a. $f(t) = \sqrt[5]{3t^2} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{8t^2}}$, b. $g(t) = 3\sqrt[5]{t^2} + \dfrac{1}{8\sqrt[3]{t^2}} - \sqrt{3t}$
8. a. $s = 7t^3(5t^2 + 8)$ b. $s = (5t^3 – 1)(7 – 7t^5)$ c. $s = (5t^3 – 2t)\ (3t^2 + 2t – 1)$
9. a. $v = \dfrac{1-3t^2}{2t^3+9}$ b. $v = \dfrac{8}{3t^5-5t+e}$ c. $v = \dfrac{3}{2t^3+5}$ d. $v = \dfrac{\pi}{5-3t^2}$

10. a. I = $(3t^2 + 1)^5$ b. I = $(1 + 2t^3)^{3/5}$, c. I = $\sqrt[3]{(6t^2)}$

11. a.f(t) = $(5t^3 + 3t^2 - 1)^{10}$ b. $h(t) = \sqrt[5]{(3t^2 + 5t - 7)^2}$ c. $y = \sqrt{(1 - 3t^2 + 2t^3)}$

12. a. I = $\sqrt[3]{(4t^3 + t - 7)^2}$ b.I = $\dfrac{1}{\sqrt[5]{(5t^3 + 2t - 1)^2}}$

c. $I = \dfrac{5}{\sqrt[7]{(1 - 3t^2 + 7t^5)^3}}$

13. a. h = $\sqrt[3]{(8t^2)}\ (3t^2 + 1)^5$ b. h = $\dfrac{1 - 3t^2}{\sqrt[5]{(5t^3 + 2t - 1)^2}}$.

7.3 Turunan Fungsi Trigonometri

1. $y = \sin x \Rightarrow y^1 = \cos x$
2. $y = \cos x \Rightarrow y^1 = -\sin x$
3. $y = \tan x \Rightarrow y^1 = \sec^2 x$
4. $y = \cot x \Rightarrow y^1 = -\csc^2 x$
5. $y = \sec x \Rightarrow y^1 = \sec x \tan x$
6. $y = \csc x \Rightarrow y^1 = -\csc x \cot x$

Contoh 10 Tentukan turunan pertama fungsi $y = 2 \sin x - 3 \cos x$

Penyelesaian $y^1 = 2 \cos x - 3 (- \sin x) = 2 \cos x + 3 \sin x$

Contoh 11 Tentukan $f^1 (\pi/2)$, jika $f(x) = 5 \cos x - 3 \sin x$

Penyelesaian $f'(x) = - 5 \sin x - 3 \cos x$,

sehingga $f^1\pi/2) = -5 \sin \pi/2 - 3 \cos \pi/2 = -5(1) - 3(0) = -5$

7.4 Aturan Berantai

Jika $y = f(u)$, dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposit $y = f(g(x)) = (f.g)(x)$, dimana y dan u, masing-masing terdiferensialkan terhadap u dan x, maka

$$y^1 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Dengan aturan berantai tersebut, jika $u = f(x)$, maka rumus-rumus 7.3 menjadi:

1. $y = \sin u \Rightarrow y^1 = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = \cos u \dfrac{du}{dx}$
2. $y = \cos u \Rightarrow y^1 = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = -\sin u \dfrac{du}{dx}$
3. $y = \tan u \Rightarrow y^1 = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$
4. $y = \cot u \Rightarrow y^1 = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = -\cos ec^2 u \dfrac{du}{dx}$
5. $y = \sec u \Rightarrow y^1 = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = \sec u \tan u \dfrac{du}{dx}$
6. $y = \csc u \Rightarrow y^1 = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = -\csc u \cot u \dfrac{du}{dx}$

Contoh 12 Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$, jika $y = (5x^3 - 3x^2 + 1)^{10}$

Penyelesaian Misalkan $u = (5x^3 - 3x^2 + 1)$, berarti $y = u^{10}$

$\dfrac{dy}{du} = 10.u^9$, dan $\dfrac{du}{dx} = 15x^2 - 6x$

$$\frac{dy}{dx} = 10\,(5x^3 - 3x^2 + 1)^9(15x^2 - 6x)$$

$$= 10\,(15x^2 - 6x)\,(5x^3 - 3x^2 + 1)^9$$

Contoh 13 Tentukan y^1 jika $y = \sqrt[5]{(3x^2 - 5x + 8)^3}$

Penyelesaian $y = \sqrt[5]{(3x^2 - 5x + 8)^3} = (3x^2 - 5x + 8)^{3/5}$

$$y^1 = \frac{3}{5}(3x^2 - 5x + 8)^{\frac{3}{5}-1}.(6x - 5) = \frac{3}{5}(6x - 5)(3x^2 - 5x + 8)^{-\frac{2}{5}}$$

Contoh 14 Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$, jika $y = 3\cos(3x^5 + \pi/3)$

Penyelesaian Misalkan $u = (3x^5 + \pi/3)$, maka $y = 3\cos u$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -3\sin u.(15x^4) = -45x^4 \sin(3x^5 + \pi/3)$$

Contoh 15 Tentukan y^1, jika $y = 2\sin^3 x$

Penyelesaian Misalkan $u = \sin x$, maka $\frac{du}{dx} = \cos x$ dan $\frac{dy}{du} = 6u^2$

$$y^1 = \frac{dy}{dx} = (6u^2).\sin x = 6\sin^2 x \cos x$$

Latihan 7.4

1. Jika $y = x^2 - 4x$ dan $x = \sqrt{2t^2+1}$, tentukan dy/dt saat t = 2,
2. Tentukan *dy/dx* , jika $y = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ dan $u = \sqrt[3]{x^2+1}$,
3. Sebuah benda menggelinding sepanjang kurva $y = x^3 - 3x + 5$ dan $x = ½\sqrt{t} + 3$, dimana t waktu. Tentukan kecepatan (sesa'at) benda sa'at t =4!
4. Sebuah benda bergerak mengikuti persamaan $x = t^2 + 2t$, $y = 3t^2 - 5t$. Tentukan *dy/dx*, sa'at (a) t = 0, (b) t = 3 (c) t = 5
5. Tentukan *dy/dt*, jika (a) $y = 2\sin(3t + \pi/3)$, (b) $y = 2\sin(3t^5 - 2t + \pi)$ (c) $y = 3\cos(\alpha - \beta t)$, (d) $y = 3\cos(\alpha + 2\beta t + 5\alpha\beta t^2)$,
6. Tentukan *dy/dx*, pada saat t = 0 jika $y = 2\sin 3t$ dan $x = 3\cos 2t$.
7. Tentukan *dy/dx* saat x = 0; jika (a) $y = 5\sin^3 x$, dan (b) $y = 3\cos^5 x$!

7.5 Fungsi Eksponensial dan Logaritma

Bilangan e = $\lim\limits_{h\to+\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h = \lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....+\frac{1}{h!}+....... = 2.71828...$

Notasi Jika a > 0, dan a ≠ 0, dan $a^y = x$, maka $y = {}^a\log x$

Selanjutnya $y = {}^{10}\log x \equiv \log x$, dan $y = {}^e\log x \equiv \ln x$.

Rumus Turunan Fungsi Logaritma dan Fungsi Eksponen

1. $y = {}^{a}\log x \Rightarrow y^{1} = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x}$, a konstan
2. $y = \ln x \Rightarrow y^{1} = \dfrac{1}{x}$,
3. $y = a^{x} \Rightarrow y^{1} = a^{x}\ln a$, jika a > 0
4. $y = e^{x} \Rightarrow y^{1} = e^{x}$

Dengan aturan berantai, jika $u = f(x)$, maka rumus turunan fungsi logaritma dan eksponen di atas menjadi:

1. $y = {}^{a}\log u \Rightarrow y^{1} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$, a konstan
2. $y = \ln u \Rightarrow y^{1} = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$,
3. $y = a^{u} \Rightarrow y^{1} = a^{u}\ln a\dfrac{du}{dx}$, jika a > 0
4. $y = e^{u} \Rightarrow y^{1} = e^{u}\dfrac{du}{dx}$

Catatan: $y^{1} = \dfrac{dy}{dx}$

Contoh 16 Tentukan turunan I dari $y = {}^{5}log\,(3x^{2} + 2x - 1)$

Penyelesaian

$$y' = \frac{1}{3x^{2}+2x-1}\,\frac{1}{\ln 5}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(3\mathrm{x}^{2}+2\mathrm{x}-1) = \frac{1}{3x^{2}+2x-1}\,\frac{1}{\ln 5}(6\mathrm{x}+2) = \frac{1}{\ln 5}(6\mathrm{x}+2)\,\frac{1}{3x^{2}+2x-1}$$

Contoh 17 Tentukan turunan I dari $y = ln\,(3x - 1)^{2}$

Penyelesaian $\quad y = ln\,(3x - 1)^{2} = 2\,ln\,(3x - 1)$

$$\mathrm{y}^{1} = 2\,(\frac{1}{3x-1}).\frac{d}{dx}(3x-1) = 2\,(\frac{1}{3x-1}).3 = \frac{6}{3x-1}$$

Contoh 18 Tentukan turunan I dari $y = ln^2 (3x - 1)$

Penyelesaian $\quad y = ln^2 (3x - 1) = [ln (3x - 1)]^2$

$$y^1 = 2\ ln\ (3x - 1)\frac{d}{dx}\ln(3x-1) = 2\ln(3x-1)\frac{3}{3x-1} = \frac{6}{3x-1}\ln(3x-1)$$

Contoh 19 Tentukan turunan I dari $y = ln\ (3x^2 - 1)(2x^3 + 1)$

Penyelesaian $\quad y = ln\ (3x^2 - 1)(2x^3 + 1) = ln\ (3x^2 - 1) + ln\ (2x^3 + 1)$

$$y' = \frac{6x}{3x^2-1} + \frac{6x^2}{2x^3+1}$$

Contoh 20 Tentukan turunan I dari $y = \ln\frac{3x^2-1}{(2x^3+1)^5}$

Penyelesaian

$$y = \ln\frac{3x^2-1}{(2x^3+1)^5} = \ln(3x^2-1) - \ln(2x^3+1)^5 = \ln(3x^2-1) - 5\ln(2x^3+1)$$

$$y' = \frac{6x}{3x^2-1} - 5\frac{6x^2}{2x^3+1} = \frac{6x}{3x^2-1} - \frac{30x^2}{2x^3+1}$$

Contoh 21 Tentukan turunan I dari $y = e^{3x-2}$

Penyelesaian $\quad y' = e^{3x-2}\frac{d}{dx}(3x-2) = 3e^{3x-2}$

Contoh 22 Tentukan turunan I dari $y = e^{3x^2+5}$

Penyelesaian $\quad y' = e^{3x^2+5}\frac{d}{dx}(3x^2+5) = 3e^{3x^5+5}(6x) = 18xe^{3x^5+5}$

Contoh 23 Tentukan turunan I dari $y = e^{3-5x}$

Penyelesaian $\quad y' = e^{3-5x}\frac{d}{dx}(3-5x) = e^{3-5x}(-5) = -5e^{3-5x}$

Contoh 24 Tentukan turunan I dari $y = e^{-2x} \sin 3x$

Penyelesaian $\quad y^1 = (-2e^{-2x})\sin 3x + 3\cos 3x\,(e^{-2x}) = e^{-2x}(-2\sin 3x + 3\cos 3x)$

Contoh 25 Tentukan turunan I dari $y = e^{-2x} \ln 3x$

Penyelesaian

$$y' = \frac{d(e^{-2x})}{dx}\ln 3x + \frac{d(\ln 3x)}{dx}e^{-2x} = -2e^{-2x}\ln 3x + \frac{1}{x}e^{-2x} = e^{-2x}(-2\ln 3x + \frac{1}{x})$$

Latihan 7.5

Tentukan turunan pertama dari

1. a. $y = {}^7\log(5x^3 + 10)$ b. $y = {}^5\log(3x^2 + 10)$ c. $y = \log(10 - 5x^3)$
2. a. $y = \ln(3x + 5)$ b. $y = 7\ln(x^3 + 5x - 1)$ c. $y = \ln(x + 5)^3$
3. a. $y = \ln^3(x + 5)$ b. $y = \ln\sqrt{2 - 5x^3}$ c. $y = 7\ln\sqrt[5]{1 - 3x^2}$
4. a. $y = \ln(7x + 5)^3$ b. $y = \ln\sqrt{(3x^2 + \pi)}$ c. $y = \ln\sqrt[5]{(1 - 7x^2)^3}$
5. a. $y = \ln^3(7x + 5)$ b. $y = \ln^3(3x^2 + 5)$
6. a. $f(x) = \ln(3x^2 + 5)(3 - 5x^3)$ b. $g(x) = \ln(4x^3 + 7)(3x - 2)^{10}$
7. a. $f(x) = \ln\dfrac{5x^4}{(3x + 4)^5}$ b. $g(x) = \ln\dfrac{(3x^5 - 5)}{(5x^3 + 8)}$
8. a. $f(x) = \ln 5(3 - 5x^3)$ b. $g(x) = \ln 7(3x - 2)^{10}$
9. a. $f(x) = \ln\dfrac{5}{(3x + 4)^5}$ b. $g(x) = \ln\dfrac{7}{(5x^3 + 8)}$
10. a. $y = 10^{3x+5}$ b. $y = 10^{2x^3-5}$ c. $y = 5^{1-2x+3x^5}$ d. $y = \pi^{1-3x^5}$
11. a. $y = e^x$ b. $y = e^{3x}$ c. $y = e^{2-3x}$ d. $y = e^{-x}$
12. a. $y = e^{\alpha x+\beta}$ b. $y = e^{\alpha-\beta x}$ c. $y = e^{\alpha x^2-\beta}$ d. $y = e^{\alpha-\beta x^3}$

    dengan α, dan β adalah konstanta.
13. a. $f(x) = 3x^2e^x$ b. $f(x) = 2x^3e^{5x}$ c. $f(x) = x^5e^{-3x}$

14. a. $\sinh \alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})$ b. $\cosh \alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})$

15. a. $\tanh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}$ b. $\coth \alpha x = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}$

16. Tentukan turunan II dari

a. $f(x) = e^{-x} \ln x$ b. $f(x) = e^{3x} \ln 2x$ c. $g(x) = e^{-3x} \cos 4x$

17. Tentukan $f^{I}(0)$ dan $f^{II}(0)$, jika

a. $f(t) = e^{-3t} \sin 2t$ b. $f(t) = e^{-2t} \cos 3t$

18. Tentukan $f^{I}(\pi/6)$ dan $f^{II}(\pi/6)$, jika $f(t) = \sin 2t \sin 3t$

19. Tentukan $f^{I}(\pi/6)$ dan $f^{II}(\pi/6)$, jika $f(t) = \cos 2t \cos 3t$

20. Tentukan $f^{I}(\pi/6)$ dan $f^{II}(\pi/6)$, jika $f(t) = \sin 2t \cos 3t$

21. Tentukan $f^{I}(\pi/6)$, jika $f(t) = \frac{\sin 2t}{\cos 3t}$

22. Tentukan $f^{I}(\pi/6)$ dan $f^{II}(\pi/6)$, jika $f(t) = \frac{\sin 3t}{\cos 4t}$

23. Tentukan $f^{1}(t)$ dan $f^{1}(0)$ jika $f(t) = 5\,(Ae^{2t} - Be^{-3t})$

24. Tentukan $f^{1}(t)$ dan $f^{1}(0)$, jika $f(t) = 5e^{2t}\,(A\,t - B)$

25. Tentukan $f^{1}(t)$ dan $f^{1}(0)$, jika $f(t) = 3e^{-2t}\,(A + Bt)$

26. Tentukan $f^{1}(t)$ dan $f^{1}(0)$, jika $f(t) = 2e^{-5t}\,(A \cos 3t - B \sin 3t)$

27. Tentukan $f^{1}(t)$, dan $f^{1}(0)$ jika $f(t) = 2e^{3t}\,(A \sin 5t + B \cos 5t)$

28. Tentukan $f^{1}(t)$ dan $f^{1}(0)$ jika $f(t) = 5\,(7e^{2t} + 3e^{-5t})$

29. Tentukan $f^{1}(t)$ dan $f^{1}(0)$, jika $f(t) = 5e^{-7t}\,(-\alpha + \beta t)$

30. Tentukan $f^{1}(t)$ dan $f^{1}(0)$, jika $f(t) = 3e^{-4t}\,(\alpha t + \beta)$

31. Tentukan $f^{1}(t)$ dan $f^{1}(0)$, jika $f(t) = 10e^{6t}\,(\alpha \cos \tfrac{1}{2} t - \beta \sin \tfrac{1}{2} t)$

32. Tentukan $f^{1}(t)$, dan $f^{1}(0)$ jika $f(t) = e^{-t}\,(\alpha \sin 2t + \beta \cos 2t)$

33. Tentukan $f^{1}(t)$ dan $f^{II}(t)$, jika $f(t) = 2 \cos 3t \ln 5t$

34. Tentukan $f^{1}(t)$ dan $f^{II}(t)$, jika $f(t) = 10 \ln 5t \cos 2t$

35. Tentukan $f^{1}(t)$, jika a. $f(t) = \frac{3e^{2t}}{2 \ln 3t}$ b. $f(t) = \frac{2e^{-3t}}{3 \ln 2t}$

BAB 8
HARGA MAKSIMUM DAN MINIMUM

Materi Pembelajaran

8.1 Pendahuluan

8.2 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

8.3 Harga Maksimum dan Harga Minimum

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini Mahasiswa diharapkan mampu:

- Memahami Konsep Harga Maksimum dan Harga Minimum,
- Menerapkan konsep-konsep Harga Maksimum dan Harga Minimum untuk menyelesaikan masalah-masalah keteknikan, khususnya masalah teknik listrik

8.1 Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering dihadapkan untuk mencapai sesuatu secara maksimum atau minimum. Teladan-teladan berikut memberikan gambaran berbagai permasalahan maksimum dan minimum dalam kehidupan sehari-hari. (1) Sebuah perusahaan kaleng untuk tempat benda-benda cair seperti minyak goreng, oli, cat, minyak wangi dan sebagainya ingin memproduksi sejumlah kaleng. Pihak pemesan hanya mensyaratkan kapasitas kaleng dengan volume tertentu. Bagaimana perusahaan kaleng tersebut menentukan ukuran kaleng agar bahan yang digunakan seminim mungkin dengan kapasitas volume yang sama? (2) Sebuah pabrik ingin memproduksi sejumlah generator. Jika x menyatakan banyaknya produksi generator perhari, dan biaya (*cost*) untuk memproduksi satu unit generator adalah $\frac{C(x)}{x}$, sedangkan bila dijual satu unit generator laku $\frac{S(x)}{x}$, berapa unit generator harus diproduksi perhari agar keuntungan yang diperoleh maksimum? (3) Seorang dokter ingin memberikan suatu jenis obat tertentu terhadap seorang pasien yang mengidap suatu penyakit tertentu. Jika x menyatakan faktor risiko terhadap pasien, berapa x harus diberikan kepada pasien agar risiko yang ditimbulkan minimum?

Dua teladan pertama memberikan gambaran tentang permasalahan maksimum, sedangkan teladan ketiga memberikan gambaran mengenai permasalahan minimum. Bab ini akan membahas konsep-konsep dasar harga maksimum dan minimum serta beberapa teori yang mendasarinya.

8.2 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Definisi Misalkan diberikan fungsi $y = f(x)$,

(a) Suatu fungsi $y = f(x)$ dikatakan naik di x_0 jika untuk suatu h positif yang cukup kecil berlaku $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 - h)$;

(b) Suatu fungsi $y = f(x)$ dikatakan turun di x_0 jika untuk suatu h positif yang cukup kecil berlaku $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 - h)$;

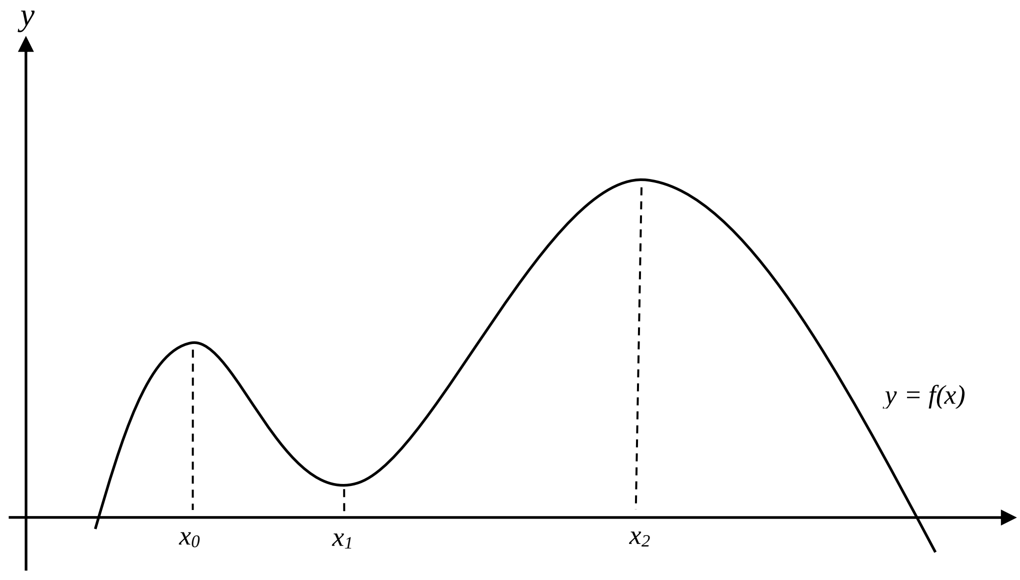
Sifat-sifat

(a) Jika $f^{I}(x_0) > 0$, maka $f(x)$ naik di x_0;

(b) Jika $f^{I}(x_0) < 0$, maka $f(x)$ turun di x_0;

(c) Jika $f^{I}(x_0) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di x_0.

Gambar 8.1 berikut memberikan gambaran bagaimana $f(x)$ naik, turun, dan mencapai stasioner.



Gambar 8.1

Pada gambar 8.1 di atas

(a) $f(x)$ naik pada $x < x_1$ dan pada $x_1 < x < x_2$,

(b) $f(x)$ turun pada $x_0 < x < x_1$ dan pada $x > x_2$,

(c) $f(x)$ stasioner pada x_0, x_1 dan x_2

8.3 Harga Maksimum dan Harga Minimum

Pada gambar 8.1 di atas $f^I(x)$ berubah tanda dari positip ke negatip di x_0 dan x_2 , dan $f^I(x)$ berubah tanda dari negatip ke positip di x_1, dan ternyata $f(x)$ mencapai maksimum (relatif) di x_0 dan x_2, dan mencapai minimum di x_1.

Sehingga bisa ditarik kesimpulan bahwa

(a) $f(x)$ mencapai maksimum di a jika $f^I(x)$ berubah tanda dari (+) ke (−);

(b) $f(x)$ mencapai minimum di a jika $f^I(x)$ berubah tanda dari (−) ke (+).

Untuk menentukan dimana fungsi naik, turun, dan mencapai stasioner dapat dilakukan uji turunan dengan prosedur sebagai berikut:

(a) Selesaikan persamaan $f^I(x) = 0$ untuk menentukan titik-titik kritis;

(b) Misalkan $f(x)$ mencapai kritis di $x = a$.

  (i) Jika $f^{II}(a) < 0$, maka $f(x)$ maksimum di $x = a$;

  (ii) Jika $f^{II}(a) > 0$, maka $f(x)$ minimum di $x = a$

Contoh 1

Tentukan dimana fungsi-fungsi ini naik, turun dan mencapai kritis. Tentukan juga jenis kritisnya, jika:

a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 10$

b. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3$

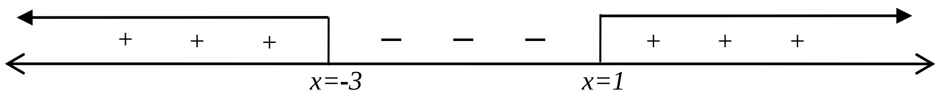
Penyelesaian a

$f^1(x) = x^2 + 2x - 3$ dan $f^{11}(x) = 2x + 2$

Untuk $f^1(x) = 0$ diperoleh $x^2 + 2x - 3 = 0$

atau $(x - 1)(x + 3) = 0$, jadi $x = 1$ atau $x = -3$.

Tentukan nilai $f^1(x)$ pada garis bilangan



Garis bilangan untuk $f^1(x)$

Jadi $f(x)$ naik pada $x < -3$ dan pada $x > 1$, dan $f(x)$ turun pada $-3 < x < 1$

- Karena $f^1(x)$ berubah tanda dari positip ke negatip pada $x = -3$, maka f(x) mencapai maksimum di $x = -3$, dan
- Karena $f^1(x)$ berubah tanda dari negatip ke positip pada $x = 1$, maka $f(x)$ mencapai minimum di $x = 1$

Untuk menentukan jenis titik kritis pada $x = -3$ dan $x = 1$ dapat juga digunakan tes derivatif kedua, yaitu

- Pada $x = -3$, $f^{11}(-3) = 2(-3) + 2 = -4 < 0$

Jadi $f(x)$ mencapai maksimum di x = –3 dengan nilai maksimum $f(-3) = 19$

- Pada $x = 1$, $f^{11}(1) = 2.1 + 2 = 4 > 0$

Jadi $f(x)$ mencapai minimum di x = 1 dengan nilai minimum $f(1) = 8\frac{1}{3}$

Contoh 2

Dua bilangan positip jumlahnya 60. Tentukan bilangan-bilangan tersebut agar

a. hasil kali bilangan pertama dan bilangan kedua maksimum;
b. hasil kali kuadrat bilangan pertama dan bilangan kedua maksimum

Penyelesaian

(a) Misalkan bilangan pertama x, dan bilangan kedua y.

$x + y = 60$ atau $y = 60 - x$

Hasil kali bilangan pertama dan kedua $f(x) = x\,y = x(60 - x) = 60x - x^2$

Hasil kali bilangan pertama dan kedua maksimum jika $f^1(x) = 0$, atau

$60 - 2x = 0$.

Jadi $x = 30$, dan $y = 60 - 30 = 30$

(b) Misalkan bilangan pertama x, dan bilangan kedua y.

$x + y = 60$ atau $y = 60 - x$.

Syarat $0 < x \leq 60$, dan $0 < y \leq 60$

Hasil kali kuadrat bilangan pertama dan kedua

$f(x) = x^2 y = x^2 (60 - x) = 60x^2 - x^3$

Hasil kali bilangan pertama dan kedua maksimum jika $f^1(x) = 0$, atau

$120x - 3x^2 = 0$.

$x(120 - 3x) = 0$.

$x = 0$ atau $x = 40$.

Jadi $x = 40$ dan $y = 60 - 40 = 20$

Latihan 1

Dua bilangan positip jumlahnya 150. Tentukan bilangan-bilangan tersebut agar

a. hasil kali bilangan pertama dan bilangan kedua maksimum;
b. hasil kali kuadrat bilangan pertama dan bilangan kedua maksimum

Latihan 2

Seutas tali yang panjangnya 500 m ingin digunakan untuk memagari sebidang tanah berbentuk persegi empat. Berapakah luas maksimum tanah yang bisa dipagari dengan tali tersebut?

Latihan 3

Sebuah perusahaan setiap hari memproduksi x unit generator. Biaya pembuatan per unit generator adalah \$(25 – x). Jika dijual setiap unit laku \$(75 – 2x). Berapa generator harus diproduksi agar diperoleh laba maksimum?

Latihan 4

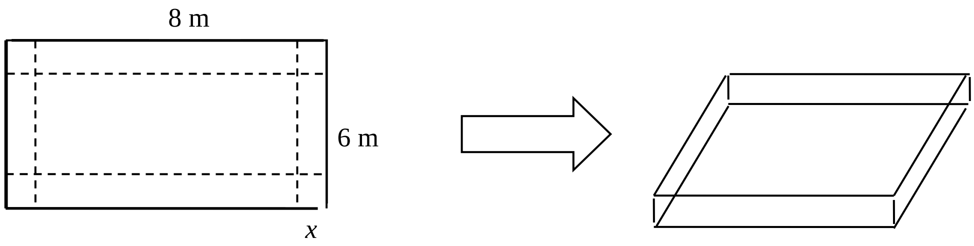
Sebuah perusahaan pembuatan kaleng mendapat pesanan 100.000 kaleng yang berkapasitas 800 cc. Tentukan dimensi kaleng agar bahan yang diperlukan minimum, jika kaleng tertutup;

Latihan 5

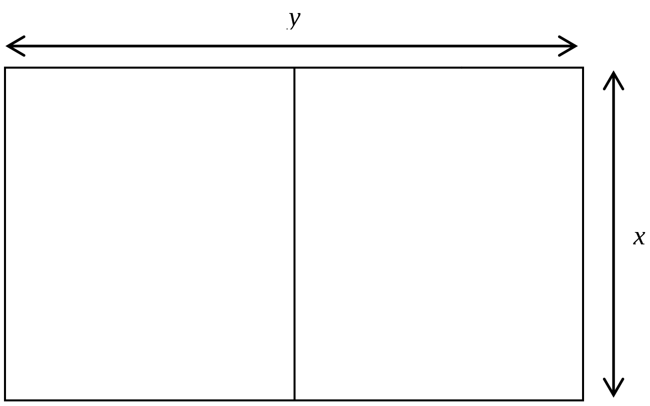
Kotak segi empat ingin dibuat dari selembar seng berukuran panjang 8 m, dan lebar 6 m dengan memotong berbentuk persegi pada pojok-pojoknya. Tentukan bagian pojok yang terpotong agar diperoleh volume kotak maksimum. (lihat gambar 8.6).

Latihan 6

Seorang petani rumput laut mempunya seutas tali sepanjang 300 m. Ia ingin membuat dua petak berdampingan yang sama luasnya, yang satu petak untuk dirinya dan petak yang lain untuk anaknya (lihat gambar 8.7). Tentukan ukuran masing-masing petak tersebut agar diperoleh luas maksimum.



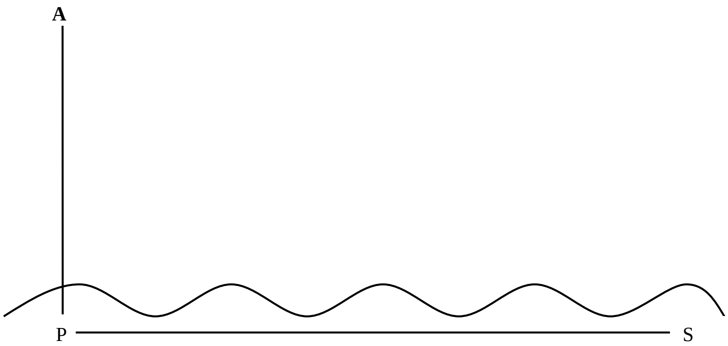
Gambar 8.6



Gambar 8.7

Latihan 7

Sebuah perahu amphibi berada di tengah laut (pada posisi A) berjarak 200 km dari pantai (P) ingin menuju sasaran (S) dipantai yang berjarak 300 km dari P (lihat gambar 8.8). Jika kecepatan amphibi di laut adalah 70 km/jam dan kecepatan di darat adalah 50 km/jam, dimana amphibi tersebut harus mendarat agar waktu yang diperlukan minimum.



Gambar 8.8

Latihan 8

Biaya total untuk memproduksi x unit generator per hari adalah (¼ x^2 + 35x + 25), dan jika dijual per unitnya laku (50 – ½ x)

c. berapa unit harus di produksi per hari agar diperoleh laba maximum ?
d. tunjukkan bahwa biaya produksi per unit tersebut adalah minimum relatif

Latihan 9

Sebuah perusahaan pembuatan kaleng mendapat pesanan sejumlah kontainer yang berkapasitas 7000 liter berbentuk silinder. Tentukan dimensi silinder agar bahan yang diperlukan minimum, jika silinder terbuka

Latihan 10

Dua bilangan positip jumlahnya 900. Tentukan bilangan-bilangan tersebut agar

(b) hasil kali bilangan pertama dan bilangan kedua maksimum;
(b) hasil kali bilangan pertama dan kuadrat bilangan kedua maksimum

BAB 9
TURUNAN PARSIAL

Materi Pembelajaran

9.1 Pendahuluan

9.2 Turunan Parsial yang Lebih Tinggi.

9.3 Diferensial Total

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini Mahasiswa diharapkan mampu:

- Memahami Turunan Parsial,
- Menerapkan konsep-konsep Turunan Parsial untuk menyelesaikan masalah-masalah keteknikan, khususnya masalah teknik listrik

9.1 Pendahuluan

Misalkan $z = f(x, y)$, menyatakan fungsi dengan variabel x dan y. Karena x dan y adalah variabel bebas, maka ada beberapa kemungkinan yang bisa terjadi, yaitu:

(a) x berubah, dan y tetap;

(b) y berubah, dan x tetap; atau

(c) x dan y berubah secara serentak.

Jika x berubah dan y tetap, maka z dapat dipandang sebagai fungsi dari x saja,

jika y berubah dan x tetap, maka z dapat dipandang sebagai fungsi dari y saja, sehingga kita bisa menentukan turunan parsial terhadap x dan/atau y.

Jika x berubah dan y tetap, kita dapat menentukan turunan parsial terhadap x, yaitu:

$$f_x(x, y) \equiv \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h};$$

Jika y berubah dan x tetap, kita dapat menentukan turunan parsial terhadap y, yaitu:

$$f_y(x,y) \equiv \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h};$$

9.2 Turunan Parsial yang Lebih Tinggi.

Turunan parsial $\frac{\partial z}{\partial x}$ dari fungsi *z* = *f(x, y)* besar kemungkinan dapat diturunkan lagi secara parsial terhadap *x* dan/atau *y*. Turunan parsial (kedua) dari $\frac{\partial z}{\partial x}$ terhadap *x* adalah

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \text{ dan } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Secara sama dari $\frac{\partial z}{\partial y}$ dapat diperoleh $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, dan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Jika *z* = *f(x, y)* dan turunan-turunan parsialnya adalah *continue*, maka $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Contoh 1

Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, dan $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, jika

1. $z = 1 + 3x^2 - 5x^2y + 7y^2$
2. $z = 5x^2 - 3xy + 10y^3 - 7$
3. $z = 2x^3 \sin y - 3y^2 \cos x$
4. $z = 5 \sin (2x^3 - 3y)$
5. $z = 5 \cos (2x - 3y^2)$

Latihan 9.2

Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$, dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ jika

1. z = $\dfrac{x^2}{y} + 5\dfrac{y^2}{x}$

2. $z = e^{3x^2 + xy}$

3. $z = \sin 2x \cos 3y$

4. $z = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$

5. Jika $z = e^{\alpha x} \cos \beta y$ dan $\beta = \pm\alpha$, tunjukkan bahwa $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

6. Jika $z = e^{-t}(\sin x + \cos y)$, tunjukkan bahwa $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial z}{\partial t}$

9.3 Diferensial Total

Diferensial *dx* dan *dy* dari fungsi satu variable *y = f(x)* didefinisikan sebagai

$$dx = \Delta x, \text{ dan } dy = f^1(x)\, dx = \frac{dy}{dx}\, dx$$

Dengan memperhatikan *z = f(x,y)* sebagai fungsi dengan dua variable *x* dan *y,* dan mendifinisikan $dx = \Delta x$, dan $dy = \Delta y$, maka ketika *x* berubah dan *y* tetap, maka *z* dapat dianggap sebagai fungsi dari *x* saja dan diferensial parsial dari *z* terhadap *x* didefinisikan sebagai $d_x z = f_x(x, y)\, dx = \dfrac{\partial z}{\partial x}\, dx$.

Secara sama diferensial parsial dari *z* terhadap *y*, didefinisikan sebagai

$d_y z = f_y(x, y)\, dy = \dfrac{\partial z}{\partial y}\, dy$.

Selanjutnya diferensial total dari *z*, yaitu *dz* didefinisikan sebagai jumlah dari kedua diferensial parsial tersebut, yaitu

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

Jika *z = f(a, b, c, …………………y),* maka

$$dz = \frac{\partial z}{\partial a}\, da + \frac{\partial z}{\partial b}\, db + \frac{\partial z}{\partial c}\, dc + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

Contoh 1

1. Dekatilah luasan suatu bentuk empat persegi panjang yang mempunyai ukuran panjang 35,02 m dan lebar 24,97 m.

   Penyelesaian;

   Misalkan luas daerah tersebut adalah ***A = xy***.

   Maka $dA = d_x A + d_y A = \dfrac{\partial A}{\partial x} dx + \dfrac{\partial A}{\partial y} dy = y\, dx + x\, dy$, dengan x = 35, dx = 0,02 dan y =25 dengan dy = −0,03.

   Sehingga ***A*** = (35)(25) = 875, dan ***dA*** = 25 (0,02) + 35 (−0,03) = − 0,55.

   Jadi luas daerah tersebut mendekati ***A + dA*** = 875 − 0,55 = 874,45 m^2

   (Bandingkan hasilnya dengan mengalikan hasilnya secara langsung)

2. Sebuah daya yang dipakai dalam tahanan listrik memenuhi persamaan $P = \dfrac{E^2}{R}$ watt. Jika E = 250 volt dan R = 5 ohm, berapa perubahan daya yang terjadi jika

   A. E dinaikkan 2,5 volt dan R diturunkan 0,2 ohm;

   B. E diturunkan 2,5 volt dan R dinaikkan 0,2 ohm;

   Penyelesaian:

   $\dfrac{\partial P}{\partial E} = \dfrac{2E}{R}$, $\dfrac{\partial E}{\partial R} = \dfrac{-E^2}{R^2}$, dan $dP = \dfrac{2E}{R} dE - \dfrac{E^2}{R^2} dR$

   Dengan mensubstitusikan E = 250, R = 5, dE = 5, dan dR = –0,2 pada ∂P, maka

   $$dP = \frac{2(250)}{5}(5) - \frac{(250)^2}{5^2}(-0{,}2) = 500 + 500 = 1000$$

   Jadi daya naik sekitar 1.000 volt

3. Dalam pemakaian rumus $R = \dfrac{E}{C}$, tentukan kesalahan maksimum dan persentase kesalahan jika C = 40 dengan p.e. 0,2 dan E = 200 dengan p.e. 0,05

   Penyelesaian:

   $$dR = d_E R + d_C R = \frac{\partial R}{\partial E} dE + \frac{\partial R}{\partial C} dC = \frac{1}{C} dE - \frac{E}{C^2} dC$$

   Kesalahan maksimum terjadi ketika dE = 0,05, dan dC = −0,2

Jadi $dR = \frac{1}{40}0{,}05 - \frac{200}{1600}(-0{,}2) = 0{,}02625$ (pendekatan p.e.)

Persentase kesalahan $\frac{dR}{R}(100) = \frac{0{,}02625}{5}(100) = 0{,}525 \approx 53\%$

Latihan 9.3

Tentukan diferensial total dari masing-masing fungsi berikut ini!

1. $z = 3x^2 + x^2y^2 - 2y^3$
2. $z = x \sin y - y \sin x$,
3. Bandingkan dz dan Δz, jika $z = x^2 + 2xy - 3y^2$
4. Sebuah daya yang dipakai dalam tahanan listrik memenuhi persamaan $P = \frac{E^2}{R}$ watt. Jika E = 500 volt dan R = 25 ohm, berapa perubahan daya yang terjadi jika
   a. E dinaikkan 5 volt dan R dinaikkan 0,5 ohm?
   b. E dinaikkan 5 volt dan R diturunkan 0,7 ohm?
   c. E diturunkan 10 volt dan R diturunkan 1 ohm?
   d. E diturunkan 7 volt dan R dinaikkan 0,5 ohm?
   e. E dinaikkan 2,5 volt dan R diturunkan 2 ohm?
   f. E diturunkan 4 volt dan R diturunkan 0,3 ohm?

5. Dengan mengacu pada soal 4 di atas,
   a. Agar daya turun 300 watt dan E dinaikkan 1 volt, berapa tahanan harus diturunkan atau dinaikkan?
   b. Agar daya naik 450 watt dan E dinaikkan 3 volt, berapa tahanan harus diturunkan atau dinaikkan?
   c. Agar daya turun 600 watt dan E diturunkankan 5 volt, berapa tahanan harus diturunkan atau dinaikkan?
   d. Agar daya naik 300 watt dan R dinaikkan 1 ohm, berapa tegangan harus diturunkan atau dinaikkan?
   e. Agar daya turun 250 watt dan R diturunkan 1.5 ohm, berapa tegangan harus diturunkan atau dinaikkan?

   f. Agar daya naik 200 watt dan R dinaikkan 2 ohm, berapa tegangan harus diturunkan atau dinaikkan?

5. Dekatilah luasan suatu bentuk empat persegi panjang yang mempunyai ukuran
   a. panjang 35,05 m dan lebar 24,95 m.
   b. panjang 49,95 m dan lebar 25,01 m
   c. panjang 50,03 m dan lebar 19,97 m
   d. panjang 99,97 m dan lebar 25,02 m
   e. panjang 70,02 m dan lebar 28,97 m
   f. panjang 59,97 m dan lebar 200,50 m

6. Dalam pemakaian rumus $R = \frac{E}{C}$, tentukan kesalahan maksimum dan persentase kesalahan jika:
   a. E = 100 dengan p.e. 0,05 dan C = 25 dengan p.e. 0,1
   b. E = 200 dengan p.e. 0,03 dan C = 50 dengan p.e. 0,3
   c. E = 300 dengan p.e. 0,01 dan C = 30 dengan p.e. 0,5
   d. E = 400 dengan p.e. 0,1 dan C = 25 dengan p.e. 0,05
   e. E = 500 dengan p.e. 0,3 dan C = 20 dengan p.e. 0,07
   f. E = 700 dengan p.e. 0,5 dan C = 35 dengan p.e. 0,09

BAB 10
TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

Materi Pembelajaran

10.1 Pendahuluan,

10.2 Turunan Fungsi Implisit

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini Mahasiswa diharapkan mampu:

- Memahami pengertian fungsi implisit,
- Menerapkan konsep-konsep fungsi implisit untuk menyelesaikan masalah-masalah keteknikan, khususnya masalah teknik listrik

10.1 Pendahuluan

Suatu variabel tertentu seringkali dinyatakan secara implisit oleh variabel yang lain. Berbeda dengan fungsi eksplisit, pada fungsi ini bentuk fungsi tidak begitu jelas karena struktur fungsinya masih kabur. Jika variabel y merupakan fungsi dari variabel x dinyatakan secara implisit, maka secara matematis dinyatakan sebagai $f(x,y) = 0$.

Contoh:

(1) Fungsi $xy - 5x - 5 = 0$, pada $x \neq 3$ menyatakan fungsi $y = \dfrac{2x+5}{x-3}$,

(2) Fungsi $9x^2 + 4y^2 - 225 = 0$ menyatakan fungsi $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{25-x^2}$ pada $|x| \leq 5$

dan $y \geq 0$, atau $y = -\dfrac{3}{2}\sqrt{25-x^2}$ pada $|x| \leq 5$ dan $y \leq 0$

10.2 Turunan Fungsi Implisit

Andaikan pada fungsi-fungsi berikut ini y adalah fungsi dari x, dan y^1 menyatakan $\dfrac{dy}{dx}$.

Contoh 1: Tentukan y^1 jika:

(1) $2x^5 + 3x^2y - 10 = 0$

(2) $3x^4 \cos y - 2y \sin x + 7 = 0$;

(3) $9x^2 + 4y^2 - 225 = 0$ pada $x = 3$

Penyelesaian

(1) $\dfrac{d}{dx}(2x^5 + 3x^2y - 10) = 2(5x^4) + 3(2x.y + x^2.\, y^1) + 0 = 0$

$$10x^4 + 6xy + 3x^2\, y^1 \qquad = 0$$

$$3x^2\, y^1 \qquad = -(10x^4 + 6xy)$$

Sehingga $\qquad y^1 = \dfrac{-(10x^4 + 6xy)}{3x^2}$

(2) $\dfrac{d}{dx}(3x^4 \cos y - 2y \sin x + 7) = 0$

$3\{4x^3 \cos y + x^4 (-\sin y.\, y^1)\} - 2\{y^1 \sin x + y \cos x\} + 0 = 0$

$12x^3 \cos y - (3x^4 \sin y)\, y^1 - 2 \sin x\, y^1 - 2y \cos x = 0$

$12x^3 \cos y - 2y \cos x - (3x^4 \sin y + 2 \sin x)\, y^1 = 0$

Jadi $y^1 = \dfrac{12x^3 \cos y - 2y \cos x}{3x^4 \sin y + 2 \sin x}$

(3) $\dfrac{d}{dx}(9x^2 + 4y^2 - 225) = 0$ pada $x = 3$,

$18x + 4(2y\, y^1) + 0 = 0$

$y^1 = -\dfrac{18x}{8y} = -\dfrac{9x}{4y}$

Pada $x = 3$, $y = 6$ atau $y = -6$,

Jadi $y^1 = -\dfrac{9(3)}{4(6)} = -\dfrac{9}{8}$ atau $y^1 = -\dfrac{9(3)}{4(-6)} = \dfrac{27}{24} = \dfrac{9}{8}$

Contoh 2: Tentukan nilai y^1 dan y^{11} di titik (1, 1) pada kurva $3x^2y + 5y - 8 = 0$.

Penyelesaian

$\dfrac{d}{dx}(3x^2y + 5y - 8) = 0$

$3(2xy + x^2y^1) + 5y^1 + 0 = 0$

$6xy + 3x^2y^1 + 5y^1 + 0 = 0$ .... (1)

$6xy + (3x^2 + 5)y^1 = 0$ $\qquad$ atau $y^1 = -\dfrac{6xy}{3x^2 + 5} = -\dfrac{6}{3+5} = -\dfrac{3}{4} = -0{,}75$

$6(y + xy^1) + 3(2xy^1 + x^2\, y^{11}) + 5y^{11} = 0$ .... dari (1).

$6y + 6xy^1 + 6xy^1 + 3x^2\, y^{11} + 5y^{11} = 0$

$6y + 12xy^1 + 3x^2\, y^{11} + 5y^{11} = 0$,

sehingga $y^{11} = -\dfrac{6y + 12xy^1}{3x^2 + 5} = -\dfrac{6(1) + 12(1)(-0{,}75)}{3(1) + 5} - \dfrac{6-9}{3+5} = -\dfrac{-3}{8} = \dfrac{3}{8}$

Latihan 10

1. Tentukan y^1, jika $5x^3 - xy^2 + 2y^3 - 7 = 0$
2. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^3 - x^2y + 2y^5 = 10$
3. Tentukan y^1 dan y^{11} pada (1, 1), jika $x^3y + 2xy = 3$
4. Tentukan y^1 dan y^{11} pada (1, 1), jika $x^5y + 2y^3 = 3$
5. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^2 - x^2y + 3y^2 = 7$ pada P(1, 1)
6. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^3 + x^2 \sin y + 2y^3 = 0$
7. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^2 + y \sin x + 2y^5 = 0$
8. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $2x^3 - x^2 \cos y + 5y^2 = 0$
9. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $7x^2 - y \cos x + 2y^3 = 0$
10. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^2 - \cos x \sin y + 2y^3 = 5$
11. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^3 - \sin x \cos y + 2y^3 = 5$
12. Tentukan gradien fungsi $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2\, b^2$ di titik (x_0,y_0)
13. Tentukan gradien fungsi $ay^2 + 5x^2\, y + \mathrm{b}y^2 = 0$ di titik (x_0,y_0)
14. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^2 - \sin x \cos y + 2y^5 = 0$ di titik (0, 0)
15. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^3 - \cos x \sin y + 2y^3 = 0$ di titik (0, 0)
16. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^2 - 7e^{2y} \sin x + 2y^5 = 0$ di titik (0, 0)
17. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^2 - 3e^{2x} \cos y + 2y^3 = 0$ di titik (0, 0)
18. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^2 - y \sin x^2 + 2y^5 = 0$ di titik (0, 0)
19. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^3 - y \cos x^2 + 2y^3 = 0$ di titik (0, 0)
20. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^2 - 7e^{2x} \sin y + 2y^5 = 0$ di titik (0, 0)
21. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^2 - 3e^{2y} \cos x + 2y^3 = 0$ di titik (0, 0)
22. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^2 - 7y\, e^{2x} = 0$ di titik (0, 0)
23. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^2 - 4x^3\, e^{2y} + 2y^3 = 0$ di titik (0, 0)
24. Tentukan y^1 dan y^{11}, jika $5x^7 - 7y^2\, e^{2x} + 2y^5 = 0$ di titik (0, 0)

DAFTAR PUSTAKA

Beiser. A. 1981. *"Theory and Problems of Basics Mathematics for Electricity and Electronics"*. Singpore: McGraw - Hill Book Company.

Bird, J.O. and May, A.J.C. 1981. *"Mathematics for Electrical Technicians"* New York: Longman Group Limited.

Bird, J.O. and May, A.J.C. 1981. *"Calculus for Technicians"* New York: Longman Group Limited.

Frank Ayres, J.R. 1981. "*Theory and Problems of Calculus"*. Singapore: McGraw - Hill Book Company.

Purcell, E.J. and Dale Varberg. 1984. "*Kalkulus dan Geometri Analitis I* (terjemah)" Jakarta: Erlangga.