BUKU PEGANGAN KULIAH

STATISTIKA MATEMATIKA 1

Disusun

Ismanto,S.Si.,M.Pd

Anisa Fitri, M.Pd

Astrid Chandra Sari, M.Pd

Naning Kurniawati, M.Pd

Festian Cindarbumi, M.Pd

FAKULTAS KEGURUAN ILMU PENDIDIKAN (FKIP)

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS NAHDLATUL ULAMA

SUNAN GIRI BOJONEGORO

Jl. A. Yani No.10 Bojonegoro, Email: unugiri.bjn@gmail.com

BAB SATU
KONSEP DASAR PROBABILITAS

1.1.Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa dapat memahami

a. Pengertian konsep dasar probabilitas
b. Konsep-konsep yang berlaku dalam probabilitas
c. Mengaplikasikan konsep dasar probabilitas untuk menyelesaikan masalah

1.2.Rangkuman Materi

a. Ruang sampel (*sample space*) kumpulan dari semua titik sampel yang mungkin muncul dalam suatu kejadian
b. *Mutually exclusive outcomes* adalah suatu kejadian yang tidak bisa terjadi secara simultan
c. *Mutually exclusive events* $A_1, A_2, \dots, A_n$: dua kejadian dikatakan *exclusive* jika $A_i \cap A_j = \emptyset$, untuk semua $i \neq j$,
d. Kejadian (*event*) adalah kumpulan dari titik sampel, atau sembarang himpunan bagian yang sesuai dengan kejadian,
e. Probabilitas kejadian A: suatu kejadian A terdiri dari suatu himpunan bagian titik-titik sampel dinotasikan $P(A) = \sum_{a_i \in A} P(a_i)$, adalah jumlah dari $P(a_i)$ atas semua semua titik sampel kejadian A
f. Aksioma Probabilitas
   - Untuk setiap kejadian A berlaku $P(A) \geq 0$
   - Untuk kejadian pasti S berlaku $P(S) = 1$
   - Jika $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah *mutually exclusive* atau *disjoint* maka
     $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$,
g. Jika $A \subseteq B$ maka $P(A) \leq P(B)$ dan $P(B - A) = P(B) - P(A)$

   <u>Bukti:</u>

   Karena $B = A \cup (B - A)$, karena A dan B – A saling lepas, maka

   $P(B) = P\big(A \cup (B - A)\big) = P(A) + P(B - A)$, sehingga $P(B - A) = P(B) - P(A)$

   Karena $P(B - A) = P(B) - P(A)$ dan untuk sebarang kejadian $B - A$ berlaku $P(B - A) \geq 0$, sehingga

   $P(B - A) = P(B) - P(A) \geq 0$ diperoleh $P(A) \leq P(B)\square$
h. Untuk sebarang kejadian A, berlaku $0 \leq P(A) \leq 1$,

Bukti:

Menurut aksioma probabilitas untuk setiap kejadian A berlaku $P(A) \geq 0$,
karena A $\subset$ S dan $P(S) = 1$, maka $0 \leq P(A) \leq P(S) = 1$, sehingga diperoleh $0 \leq P(A) \leq 1$.□

i. $P(\emptyset) = 0$

Bukti:

Karena $S = S \cup \emptyset$ dan $S \cap \emptyset = \emptyset$ ini menunjukkan bahwa S dan $\emptyset$ saling lepas. Berdasarkan aksioma $P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$, sehingga diperoleh $P(\emptyset) = P(S) - P(S) = 0$.□

j. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

Bukti:

Karena $A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$, dan $A \cap (B - (A \cap B) = \emptyset$, maka A dan $B - (A \cap B)$ adalah kejadian saling bebas, menurut aksioma

$P(A \cup B) = P(A \cup \left(B - (A \cap B)\right) = P(A) + P(B - (A \cap B))$.

Karena $P\left(B - (A \cap B)\right) = P(B) - P(A \cap B)$, maka

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$□

k. $P(A^C) = 1 - P(A)$,

Bukti:

Karena $A \cup A^C = S$ dan $A \cap A^C = \emptyset$, menurut aksioma

$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) = P(S) = 1$, sehingga $P(A^C) = 1 - P(A)$.□

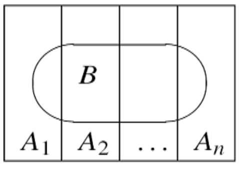
l. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$
$+P(A \cap B \cap C)$,

m. $P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap E^C)$,

Bukti:

Karena $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^C)$ dan $A \cap E$ dan $A \cap E^C$ saling bebas, maka menurut aksioma $P(A) = P\left((A \cap E) \cup (A \cap E^C)\right) = P(A \cap E) + P(A \cap E^C)$

Perhatikan diagram veen berikut



Maka berlaku secara umum

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ ... + P(B \cap A_n)$$

n. Jika A dan B adalah kejadian saling bebas *(independent*), maka

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$,

1.3.Soal dan Pembahasan

1. Diketahui $P(A \cap B) = 0{,}2, P(A) = 0{,}6$ dan $P(B) = 0{,}5$.

   Tentukan $P(A^C \cup B^C), P(A^C \cap B^C), P(A^C \cap B)$ dan $P(A^C \cup B)$ berturut-turut adalah

   a. 0,8; 0,1; 0,3 dan 0,8

   b. 0,1; 0,8; 0,3 dan 0,8

   c. 0,8; 0,8, 0,3 dan 0,1

   d. 0,2; 0,8; 0,8 dan 0,3

   e. 0,8; 0,8;0,2 dan 0,3

   Penyelesaian:

   Diketahui: $P(A \cap B) = 0{,}2, P(A) = 0{,}6$ dan $P(B) = 0{,}5$,

   Ditanya: $P(A^C \cup B^C), P(A^C \cap B^C), P(A^C \cap B)$ dan $P(A^C \cup B)$

   Jawab: Karena $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ dan $P(A^C) = 1 - P(A)$, maka

   $P(A^C \cup B^C) = P(A \cap B)^C$, karena $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

   $P(A^C \cup B^C) = 1 - P(A \cap B)$, karena $P(A^C) = 1 - P(A)$

   $P(A^C \cup B^C) = 1 - 0{,}2$, karena $P(A \cap B) = 0{,}2$

   $P(A^C \cup B^C) = 0{,}8$

   ∴ Jadi $P(A^C \cup B^C)$ = 0,8.

   Karena $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, maka

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   $P(A \cup B)$ = 0,6 + 0,5 – 0,2

   $P(A \cup B)$ = 0,9

Diperoleh $P(A \cup B)$ = 0,9. Karena $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ dan $P(A^C) = 1 - P(A)$, maka

   $P(A^C \cap B^C) = P(A \cup B)^C$, karena $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

   $P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B)$, karena $P(A^C) = 1 - P(A)$,

   $P(A^C \cap B^C) = 1 - 0{,}9$, karena $P(A \cup B)$= 0,9

   $P(A^C \cap B^C) = 0{,}1$

   ∴ Jadi $P(A^C \cap B^C)$ = 0,1

   Karena $P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap E^C)$, maka

   $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$, karena $P(A \cap B) = 0{,}2$

   $0{,}5 = 0{,}2 + P(B \cap A^C)$, karena $P(A \cap B) = 0{,}2$ dan $P(B) = 0{,}5$,

   $P(B \cap A^C) = 0{,}5 - 0{,}2$

   $P(B \cap A^C)$ = 0,3

∴ Jadi $P(B \cap A^C) = 0{,}3$

Karena $P(B \cap A^C) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$, dan $P(A) = 0{,}6$ maka

$$\begin{aligned} P(A^C \cup B) &= P(A^C) + P(B) - P(A^C \cap B) \quad \text{, karena } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \left(1 - P(A)\right) + P(B) - P(A^C \cap B) \quad \text{, karena } P(A^C) = 1 - P(A) \\ &= 1 - 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

∴ Jadi $P(A^C \cup B) = 0{,}8$.

2. Diketahui $P(A \cup B) = 0{,}7$ dan $P(A \cup B^C) = 0{,}9$. Tentukan $P(A)$
   a. 0,4
   b. 0,5
   c. 0,6
   d. 0,7
   e. 0,8

   Penyelesaian:

   Diketahui: $P(A \cup B) = 0{,}7$ dan $P(A \cup B^C) = 0{,}9$

   Ditanya: $P(A)$

   Jawab: Karena $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, maka

$$\begin{aligned} 0{,}7 &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ dan} \\ 0{,}9 &= P(A \cup B^C) = P(A) + P(B^C) - P(A \cap B^C) \quad + \\ \hline 1{,}6 &= 2P(A) + P(B) + P(B^C) - (P(A \cap B) + P(A \cap B^C)) \end{aligned}$$

$1{,}6 = 2P(A) + 1 - P(A)$, karena $P(B) + P(B^C) = 1$ dan $P(A \cap B) + P(A \cap B^C) = P(A)$

   Sehingga diperoleh $P(A) = 0{,}6$

3. Jika E dan F adalah kejadian dimana $P(E \cup F) = 1$, maka tentukan persamaan yang ekuivalen dengan $P(E^C \cup F^C)$.
   a. $P(E^C)P(F^C)$.
   b. $P(E^C) + P(F^C)$
   c. $P(E^C) - P(F^C)$.
   d. $\frac{P(E^C)}{P(F^C)}$
   e. $P(E^C) + P(F^C) - P(E^C \cap F^C)$

   Penyelesaian:

   Diketahui: $P(E \cup F) = 1$

   Ditanya: $P(E^C \cup F^C)$

Jawab: Perhatikan karena $P(E \cup F) = 1$, maka $P(E \cup F)^C = 1 - P(E \cup F) = 1 - 1 = 0$. Karena $(E \cup F)^C = E^C \cap F^C$ dan $P(E \cup F)^C = 0$, maka $P(E^C \cap F^C) = 0$. Karena $P(E^C \cap F^C) = 0$, maka $P(E^C \cup F^C) = P(E^C) + P(F^C) - P(E^C \cap F^C)$

$$= P(E^C) + P(F^C) - 0 = P(E^C) + P(F^C).$$

Jadi $P(E^C \cup F^C) = P(E^C) + P(F^C)$.

4. Tiga dadu ditos secara *independen*t. Diberikan E_i adalah kejadian bahwa dadu ke-*i* menghasilkan angka 6. Tentukan $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$
   a. $\frac{89}{216}$
   b. $\frac{90}{216}$
   c. $\frac{91}{216}$
   d. $\frac{92}{216}$
   e. $\frac{93}{216}$

   <u>Penyelesaian:</u>

   Diketahui: E_1, E_2 dan E_3 *independen*t, E_i adalah kejadian bahwa dadu ke-*i* menghasilkan angka 6

   Ditanya: $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

   Jawab: Karena $P(A) = 1 - P(A)^C$, maka $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)^C$, sehingga $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - P\left({E_1}^C \cap {E_2}^C \cap {E_3}^C\right)$. Karena E_1, E_2 dan E_3 *independen*t, maka $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - P\left({E_1}^C\right)P\left({E_2}^C\right)P\left({E_3}^C\right)$. Karena $P\left({E_1}^C\right) = P\left({E_1}^C\right) = P\left({E_1}^C\right) = \frac{5}{6}$, maka $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

   Jadi $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \frac{91}{216}$.

5. Diketahui A, B dan C adalah kejadian dimana A dan B saling *independent*, B dan C *mutually exclusive*. Jika $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ dan $P(C) = \frac{1}{2}$. Tentukan $P((A \cap B)^C \cup C)$
   a. $\frac{20}{24}$
   b. $\frac{21}{24}$
   c. $\frac{22}{24}$
   d. $\frac{23}{24}$
   e. $\frac{25}{24}$

Penyelesaian:

Diketahui: A, B dan C adalah kejadian dimana A dan B saling *independent*, B dan C *mutually exclusive*, $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ dan $P(C) = \frac{1}{2}$

Ditanya: $P((A \cap B)^C \cup C)$

Jawab: Karena $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$, maka $P((A \cap B)^C \cup C) = P(A^C \cup B^C \cup C)$. Karena operasi union pada himpunan besifat asosistif dan B dan C *mutually exclusive* $(C \subset B^C)$, maka $P((A \cap B)^C \cup C) = P(A^C \cup B^C \cup C) = P\left(A^C \cup (B^C \cup C)\right) = P(A^C \cup B^C)$. Karena $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$, A dan B saling *independent* dan $P(A)^C = 1 - P(A)$, maka $P(A^C \cup B^C) = P(A \cap B)^C = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A)P(B) = 1 - \frac{1}{4} . \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$

6. Diketahui Q dan S adalah kejadian yang saling independent sedemikian sehingga probabilitas paling sedikit satu kejadian adalah $\frac{1}{3}$ dan probabilitas Q terjadi tetapi S tidak terjadi adalah $\frac{1}{9}$. Tentukan $P(S)$

   a. $\frac{1}{9}$

   b. $\frac{2}{9}$

   c. $\frac{3}{9}$

   d. $\frac{4}{9}$

   e. $\frac{5}{9}$

   Penyelesaian:

   Diketahui: $P(Q \cup S) = \frac{1}{3}$, $P(Q \cap S^C) = \frac{1}{9}$

   Ditanya: $P(S)$

   Jawab: Karena $Q \cup S = (Q \cup S) \cap \emptyset = (Q \cup S) \cap (S \cup S^C) = (Q \cap S^C) \cup S$. Karena $Q \cup S = (Q \cap S^C) \cup S$ adalah *mutually exclusive*, sehingga $P(Q \cup S) = P(Q \cap S^C) + P(S)$ atau $P(S) = P(Q \cup S) - P(Q \cap S^C) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$. Jadi $P(S) = \frac{2}{9}$.

7. Diketahui A dan B adalah kejadian independent. Tentukan probabilitas dalam bentuk P(A) dan P(B), jika tepat satu kejadian A dan B terjadi.

   a. $P(A) + P(B) - 2P(A)P(B)$.

b. $P(A) + P(B) - 3P(A)P(B)$.

c. $P(A) + P(B) - P(A)P(B)$.

d. $P(A) + P(B) + P(A)P(B)$.

e. $P(A) + P(B) + 2P(A)P(B)$.

Penyelesaian:

Diketahui: A dan B kejadian *independent*

Dintanya: $P(A \cup B) - P(A \cap B)$

Jawab: Karena $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dan A dan B kejadian *independent*, maka

$$\begin{aligned} P(A \cup B) - P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A)P(B) \end{aligned}$$

Jadi $P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A)P(B)$.

8. Archie melempar sepasang mata dadu bersisi enam, dan X adalah angka yang muncul pada dadu pertama, Y adalah angka yang muncul pada dadu kedua. Diketahui X dan Y independent. Jika

- $E_1 = \{X\ adalah\ bilangan\ ganjil\}$
- $E_2 = \{Y\ adalah\ bilangan\ ganjil\}$
- $E_3 = \{X + Y\ adalah\ bilangan\ ganjil\}$

Manakah dari pernyataan berikut ini yang benar:

i. E_1 dan E_2 *independent*

ii. E_1 dan E_3 *independent*

iii. E_2 dan E_3 *independent*

iv. E_1, E_2 dan E_3 *independent*

a. i dan ii

b. ii dan iii

c. iii dan iv

d. i, ii dan iii

e. i, ii, iii dan iv

Penyelesaian:

Diketahui: X adalah angka yang muncul pada dadu pertama, Y adalah angka yang muncul pada dadu kedua, X dan Y *independent*.

Ditanya: Manankah pernyataan yang benar dari pernyataan i s.d iv

Jawab: Karena E_1 adalah probabilitas muncul angka ganjil pada dadu pertama maka $P(E_1) = \frac{1}{2}$, begitu juga Karena E_2 adalah probabilitas muncul angka ganjil pada dadu kedua maka $P(E_2) = \frac{1}{2}$. Karena E_3 adalah probabilitas muncul angka berjumlah ganjil pada pelemparan dadu pertama dan kedua, maka $P(E_3) = \frac{3.3+3.3}{6.6} = \frac{1}{2}$.

Karena $P(E_1 \cap E_2) = \frac{3.3}{6.6} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(E_1)P(E_2)$, maka terbukti bahwa E_1 dan E_2 *independent*, sehingga pernyataan i benar.

Karena $P(E_1 \cap E_3) = \frac{3.3}{6.6} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(E_1)P(E_3)$, maka terbukti bahwa E_1 dan E_3 *independent*, sehingga pernyataan ii benar

Karena $P(E_2 \cap E_3) = \frac{3.3}{6.6} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(E_2)P(E_3)$, maka terbukti bahwa E_2 dan E_3 *independent*, sehingga pernyataan iii benar

Karena $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{0}{6.6} = 0 \neq \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(E_1)P(E_2)P(E_3)$, maka tidak terbukti bahawaE_1, E_2 dan E_3 *independent*, sehingga pernyataan iv salah.

Jadi jawaban yang benar adalah pernyataan i, ii dan iii yang benar.

9. Diketahui E dan F adalah kejadian dimana $P(E) = \frac{1}{2}, P(F) = \frac{1}{2}$ dan $P(E^C \cap F^C) = \frac{1}{3}$. Tentukan $P(E \cup F^C)$
   a. $\frac{1}{6}$
   b. $\frac{2}{6}$
   c. $\frac{3}{6}$
   d. $\frac{4}{6}$
   e. $\frac{5}{6}$

   Penyelesaian:

   Diketahui: $P(E) = \frac{1}{2}, P(F) = \frac{1}{2}$ dan $P(E^C \cap F^C) = \frac{1}{3}$

   Ditanya: $P(E \cup F^C)$

   Jawab: Karena $E \cup (E^C \cap F^C) = (E \cup F^C)$, maka $E \cup (E^C \cap F^C) = E \cup F^C)$ *mutually exclusive*, sehingga $P(E \cup F^C) = P\ (E) + P(E^C \cap F^C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Jadi $P(E \cup F^C) = \frac{5}{6}$.

10. Sebuah sistem mempunyai dua komponen yang disusun secara paralel, jadi sistem akan gagal jika kedua komponen tersebut juga gagal. Komponen kedua mempunyai peluang gagal dua kali dari komponen kedua. Jika kedua komponen *independent*,dan jika kemungkinan sistem gagal adalah 0,28, maka berapa probabilitas kompenen pertama gagal?
    a. 0,1
    b. 0,2
    c. 0,3
    d. 0,4
    e. 0,5

    Penyelesaian:

    Ditentukan S = kejadian komponen pertama gagal dan D = kejadian komponen kedua gagal,

    Diketahui: $P(D) = 2P(S)$, $P(S \cap D) = P(S)P(D)$ dan $P(S \cup D) = 0{,}28$

    Ditanya: $P(S)$

    Jawab: Karena $P(S \cup D) = 0{,}28$, maka $0{,}28 = P(S) + P(D) - P(S \cap D)$. Karena $P(S \cap D) = P(S)P(D)$, maka $0{,}28 = P(S) + P(D) - P(S)P(D)$. Karena $P(D) = 2P(S)$, maka $0{,}28 = P(S) + 2P(S) - P(S)2P(S)$, sehingga $0{,}28 = 3P(S) - 2(P(S))^2$

    Karena $2(P(S))^2 - 3P(S) + 0{,}28$, maka $P(S)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(2)(0{,}28)}}{4} = \frac{3 \pm 2{,}6}{4} = \begin{cases} 1{,}4 \\ 0{,}1 \end{cases}$.

    Karena $P(S) = 1{,}4$ yang tidak meungkin memenuhi, sehingga $P(S) = 0{,}1$. Jadi jawaban yang benar adalah 0,1.

11. Survei yang dilakukan terhadap 1000 orang ditemukan bahwa 80% suka olahlaraga jalan kaki, 60% suka olahraga bersepeda dan semuanya paling sedikit menyukai salah satu olah raga tersebut. Berapa probabilitas terpilihnya seseorang yang suka olahraga bersepeda tetapi tidak suka olahraga jalan kaki?
    a. 0,1
    b. 0,2
    c. 0,3
    d. 0,4
    e. 0,5

    Penyelesaian:

Terlebih dahulu ditetapkan bahwa J = persentase orang yang suka olahraga jalan kaki, S = persentase orang yang suka olahraga bersepeda, maka

Diketahui: $P(J) = 80\% = 0{,}8$, $P(S) = 60\% = 0{,}6$ dan $P(J \cup S) = 1$

Ditanya: $P(J^C \cap S)$

Jawab: Karena $P(S) = P(S \cap J^C) + P(S \cap J)$, dan $P(S \cap J) = P(S) + P(J) - P(J \cup S)$, maka $P(J^C \cap S) = P(S) - \big(P(S) + P(J) - P(J \cup S)\big) = 0{,}6 - (0{,}6 + 0{,}8 - 1) = 0{,}2$

12. Survei yang dilakukan terhadap 1000 orang Kanada menunjukkan mereka suka olahraga bola voli, badminton dan suka kedua-duanya. Hasil survei menunjukkan 800 suka olahraga bolavoli, 600 orang suka olahraga badminton. Berdasarkan informasi tersebut, tentukan probabilitas terpilihnya seseorang yang suka badminton tetapi tidak suka bolavoli?

    a. $\frac{1}{3}$
    b. $\frac{2}{3}$
    c. $\frac{1}{4}$
    d. $\frac{1}{2}$
    e. $\frac{3}{4}$

    <u>Penyelesaian:</u>

    Sebelumnya ditentukan bahwa V = jumlah orang yang suka olahraga bolavoli,

    B = jumlah orang yang suka olahraga badminton,

    Diketahui: $n(V) = 800, n(B) = 600$ dan $n(V \cup B) = 1000$

    Ditanya: $P(B \cap V^C)$

    Jawab: Karena $n(V \cup B) = n(V) + n(B) - n(V \cap B)$, maka $n(V \cap B) = n(V) + n(B) - n(V \cup B)$, sehingga $n(V \cap B) = 800 + 600 - 1000 = 400$. Karena $n(V \cap B) = 400$, maka $n(B \cap V^C) = n(B) - n(V \cap B) = 600 - 400 = 200$. Karena $n(B \cap V^C) = 200$ dan $n(B) = 600$, maka $P(B \cap V^C) = \frac{n(B \cap V^C)}{n(B)} = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}$

13. Survei yang dilakukan terhadap pasien disuatu rumah sakit menunjukkan bahwa 22% pasien mengunjungi ahli bedah tulang dan terapis fisik, dan 12% tidak mengunjugi keduanya. Probabilitas bahwa pasien mengunjugi ahli tulang 0,14 lebih dari probabilitas

pasien mengunjungi terapis fisik. Tentukan probabilitas pasien yang terpilih telah mengunjungi terapis fisik!

a. 0,38
b. 0,48
c. 0,58
d. 0,68
e. 0,78

Penyelesaian:

Sebelumnya ditentukan F = jumlah pasien yang mengunjungi terapis fisik, T = jumlah pasien yang mengunjungi ahli bedah tulang,

Diketahui: $P(T \cap F) = 22\% = 0{,}22; P((T \cup F)^C) = 12\% = 0{,}12$ dan $P(T) = 0{,}14 + P(F)$

Ditanya: $P(F)$

Jawab: Karena $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dan $P(A^C) = 1 - P(A)$, maka

$$\begin{aligned} 0{,}12 = P((T \cup F)^C) &= 1 - P(T \cup F) \\ &= 1 - (P(T) + P(F) - P(T \cap F)) \\ &= 1 - (0{,}14 + P(F) + P(F) - 0{,}22) \\ &= 1 - 0{,}14 + 0{,}22 - 2P(F) \\ &= 1{,}08 - 2P(F) \end{aligned}$$

Sehingga $0{,}12 = 1{,}08 - 2P(F)$, diperoleh $P(F) = \frac{0{,}96}{2} = 0{,}48$.

14. Suatu kantong berisi 10 bola yang terdiri dari 4 bola merah dan 6 bola biru. Kantong kedua terdiri dari 16 bola merah dan sejumlah bola biru. Probabilitas bahwa bola berwarna sama adalah 0,44. Tentukan jumlah bola biru pada kantong kedua!

a. 3
b. 4
c. 5
d. 6
e. 7

Penyelesaian:

Sebelumnya ditentukan M_i = banyak bola merah dikantong ke-i, B_i = banyak bola biru dikantong ke-i, untuk $i = 1, 2$.

Diketahui: $n(M_1) = 4, n(M_2) = 16, n(B_1) = 6$ dan $P(M_i \cup B_i) = 0{,}44$

Ditanya: $n(B_2) = x$

Jawab: Kejadian di kantong 1 dan 2 saling lepas (*disjoint*), dengan $P(M_i)$ adalah peluang terambilnya bola dua duanya merah dari kantong 1 dan 2, $P(B_i)$ adalah peluang terambilnya bola dua duanya biru dari kantong 1 dan 2, dimana $i = 1, 2$.

$P(M_i \cup B_i) = P(M_i) + P(B_i)$, untuk $i = 1, 2$, dimana

$P(M_i) = P(M_1 \cap M_2) = P(M_1).P(M_2)$, karena M_1 dan M_2 saling independen, begitu juga $P(B_i) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).P(B_2)$, karena B_1 dan B_2 saling independen., sehinngga diperoleh

$$\begin{aligned} 0{,}44 = P(M_i \cup B_i) &= P(M_i) + P(B_i), \\ &= P(M_1 \cap M_2) + P(B_1 \cap B_2) \\ &= P(M_1)P(M_2) + P(B_1)P(B_2) \\ &= \frac{4}{10}\left(\frac{16}{16+x}\right) + \frac{6}{10}\left(\frac{x}{16+x}\right) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\frac{4}{10}\frac{16}{16+x} + \frac{6}{10}\frac{x}{16+x} = 0{,}44$, diperoleh $x = 4$

15. Sebuah bola diambil secara random dari suatu kantong yang berisi 10 bola yang diberi nomor 1 sampai dengan 10. Diberikan X adalah kejadian nomor bola tertentu yang terambil, R adalah kejadian bola bernomor genap yang terambil, S adalah kejadian bola bernomor $X \geq 6$ yang terambil dan T adalah kejadian bola bernomor $X \leq 4$ yang terambil. Diantara pasangan kejadian (R,S), (R,T) dan (S,T), manakah yang merupakan pasangan kejadian yang *independent*?

    a. Hanya (R,S) saja
    b. Hanya (R,T) saja
    c. Hanya (S,T) saja
    d. Hanya (R,S) dan (R,T) saja
    e. (R,S), (R,T) dan (S,T)

    <u>**Penyelesaian:**</u>

    Diketahui: X adalah kejadian nomor bola tertentu yang terambil, R adalah kejadian bola bernomor genap yang terambil, S adalah kejadian bola bernomor $X \geq 6$ yang terambil dan T adalah kejadian bola bernomor $X \leq 4$ yang terambil

    Ditanya: Diantara pasangan kejadian (R,S), (R,T) dan (S,T), manakah yang merupakan pasangan kejadian yang *independent*

Jawab: Karena R adalah kejadian bola bernomor genap yang terambil dari kantong yang berisi bola bernomor 1 sampai 10, maka $P(R) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Karena S adalah kejadian bola bernomor $X \geq 6$ yang terambil dari kantong yang berisi bola bernomor 1 sampai 10, maka $P(R) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Karena T adalah kejadian bola bernomor $X \leq 4$ yang terambil dari kantong yang berisi bola bernomor 1 sampai 10, maka $P(R) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Karena $P(R \cap S) = P(6\ atau\ 8\ atau\ 10) = \frac{3}{10} \neq \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(R)P(S)$ jadi (R,S) tidak independent,

Karena $P(R \cap T) = P(2\ atau\ 4) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \frac{1}{2}.\frac{2}{5} = P(R)P(T)$ jadi (R,T) independent,

Karena $P(S \cap T) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{2}.\frac{2}{5} = P(S)P(T)$ jadi (S,T) tidak independent,

Jadi jawaban yang benar adalah B.

16. Diketahui S dan T independent. Jika $P(S \cap T) = \frac{1}{10}, P(S \cap T^C) = \frac{1}{5}$, maka $P((S \cup T)^C)$ adalah ...

a. $\frac{3}{10}$

b. $\frac{11}{30}$

c. $\frac{7}{15}$

d. $\frac{8}{15}$

e. $\frac{9}{10}$

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui: $P(S \cap T) = \frac{1}{10}, P(S \cap T^C) = \frac{1}{5}$

Ditanya: $P((S \cup T)^C)$

Jawab: Karena $P(S) = P(S \cap T) + P(S \cap T^C)$, maka $P(S) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

Karena S dan independent, berarti $P(S \cap T) = P(S)P(T)$,

sehingga $P(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$

Karena $P((S \cup T)^C) = 1 - P(S \cup T)$, dan $P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T)$,

maka $P((S \cup T)^C) = 1 - (P(S) + P(T) - P(S \cap T) = 1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10}\right) = \frac{7}{15}$

Jadi jawaban yang benar adalah C

17. Diketahui R, S dan T *independent*, dengan probabilitas masing-masing $\frac{1}{3}$. Tentukan $P(R \cup S \cup T)$
    a. $\frac{1}{27}$
    b. $\frac{2}{3}$
    c. $\frac{19}{27}$
    d. $\frac{26}{27}$
    e. 1

    Penyelesaian:

    Diketahui: R, S dan T *independent*, dimana $P(R) = P(S) = P(T) = \frac{1}{3}$

    Ditanya: $P(R \cup S \cup T)$

    Jawab: Karena $P(R \cup S \cup T) = P(R) + P(S) + P(T) - P(R \cap S) - P(R \cap T) - P(S \cap T) + P(R \cap S \cap T)$ dan R, S dan T *independent*, maka $P(R \cup S \cup T) = P(R) + P(S) + P(T) - P(R)P(S) - P(R)P(T) - P(S)P(T) + P(R)P(S)P(T)$, sehingga $P(R \cup S \cup T) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}.\frac{1}{3} - \frac{1}{3}.\frac{1}{3} - \frac{1}{3}.\frac{1}{3} - \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{19}{27}$

    Jadi jawaban yang benar adalah C

18. Jika A, B, C dan D *independent*, dan $P(A) = 0{,}6, P(B) = 0{,}5, P(C) = 0{,}4$ dan $P(D) = 0{,}3$. Tentukan probabilitas bahwa paling sedikit kejadian ini terjadi
    a. 0,2908
    b. 0,3748
    c. 0,4684
    d. 0,6140
    e. 0,7092

    Penyelesaian:

    Diketahui: A, B, C dan D *independent* dan $P(A) = 0{,}6, P(B) = 0{,}5, P(C) = 0{,}4$ dan $P(D) = 0{,}3$

    Ditanya: Probabilitas paling sedikit dua kejadian ini terjadi

    Jawab: Peluang kejadian paling sedikit dua kejadian terjadi adalah satu dikurangi jumlah dari peluang kejadian ini tidak terjadi dengan jumlah seluruh peluang kejadian tepat satu kejadian terjadi. Ditentukan X adalah kejadian ini terjadi, maka

$P(X = 2,3,4) = 1 - (P(A^C \cap B^C \cap C^C \cap D^C) + P(A \cap B^C \cap C^C \cap D^C) + P(A^C \cap B \cap C^C \cap D^C) + P(A^C \cap B^C \cap C \cap D^C) + P(A^C \cap B^C \cap C^C \cap D))$

Karena $P(A) = 0{,}6$, maka $P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Karena $P(B) = 0{,}5$, maka $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Karena $P(C) = 0{,}4$, maka $P(C^C) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Karena $P(D) = 0{,}3$, maka $P(D^C) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Karena A, B, C dan D *independent*,

maka $(P(A^C \cap B^C \cap C^C \cap D^C) = P(A^C)P(B^C)P(C^C)P(D^C) = (0{,}4)(0{,}5)(0{,}6)(0{,}7) = 0{,}084$,

Karena A, B, C dan D *independent*,

maka $\left(P\left(A \cap B^C \cap C^C \cap D^C\right) = P\left(A\right)P(B^C)P(C^C)P(D^C) = (0{,}6)(0{,}5)(0{,}6)(0{,}7) = 0{,}126\right.$,

Karena A, B, C dan D *independent*,

maka $\left(P\left(A^C \cap B \cap C^C \cap D^C\right) = P(A^C)P\left(B\right)P(C^C)P(D^C) = (0{,}4)(0{,}5)(0{,}6)(0{,}7) = 0{,}084\right.$,

Karena A, B, C dan D *independent*,

maka $\left(P\left(A^C \cap B^C \cap C \cap D^C\right) = P(A^C)P(B^C)P\left(C\right)P(D^C) = (0{,}4)(0{,}5)(0{,}6)(0{,}7) = 0{,}056\right.$,

Karena A, B, C dan D *independent*,

maka $\left(P\left(A^C \cap B^C \cap C^C \cap D\right) = P(A^C)P(B^C)P(C^C)P\left(D\right) = (0{,}4)(0{,}5)(0{,}6)(0{,}3) = 0{,}036\right.$, sehingga

$P(X = 2,3,4) = 1 - (0{,}084 + 0{,}126 + 0{,}084 + 0{,}056 + 0{,}036) = 0{,}614$. Jadi jawaban yang benar adalah D.

19. Agen asuransi menawarkan kepada kliennya auto asuransi, asuransi kepemilikan rumah dan asuransi penyewa. Asuransi kepemilikan rumah dan asuransi penyewa *mutually exclusive*. Profil klien menurut agen sebagai berikut:
    - i. 17% klien tidak mempunyai tiga jenis asuransi tersebut
    - ii. 64% klien memiliki auto asuransi
    - iii. Probabilitas asuransi kepemilikan rumah adalah dua kali probabilitas asuransi penyewa
    - iv. 35% klien memiliki 2 asuransi dari tiga macam asuransi yang ditawarkan

v. 11% klien mempunyai asuransi kepemilikan rumah, tetapi tidak mempunyai auto asuransi

Tentukan persentase klien mempunyai auto dan asuransi penyewa

a. 7%
b. 10%
c. 16%
d. 25%
e. 28%

<u>Penyelesaian:</u>

Ditentukan A = kejadian klien memiliki auto asuransi, K = kejadian klien memiliki asuransi kepemilikan rumah dan R = kejadian klien memilki asuransi penyewa

Diketahui: $P(A \cup K \cup R)^C = 0{,}17$, K dan R *mutually exclusive*,

$P(A) = 0{,}64$, $P(K) = 2P(R)$,

$P(A \cap R) - P(A \cap K \cap R) + P(A \cap K) - P(A \cap K \cap R) + P(K \cap R) - P((A \cap K \cap R) = 0{,}35$ dan $P(K \cap A^C) = P(K) - P(K \cap A) = 0{,}11$

Ditanya: $P(A \cap R)$

Jawab: Karena K dan R *mutually exclusive*, maka $K \cap R = \emptyset$, sehingga $P(K \cap R) = P(\emptyset) = 0$. Karena $A \cap K \cap R \subset K \cap R$, maka $P(A \cap K \cap R) = 0$. Karena $P(A \cap K \cap R) = 0$ dan $P(K \cap R) = 0$, maka $P(A \cap R) - P(A \cap K \cap R) + P(A \cap K) - P(A \cap K \cap R) + P(K \cap R) - P((A \cap K \cap R) = P(A \cap R) - 0 + P(A \cap K) - 0 + 0 - 0 = P(A \cap R) + P(A \cap K) = 0{,}35$

Karena $P(A \cup K \cup R)^C = 0{,}17$, maka $P(A \cup K \cup R) = 1 - 0{,}17 = 0{,}83$. Karena $P(A \cup K \cup R) = 0{,}83$, maka

$$\begin{aligned} 0{,}83 &= P(A \cup K \cup R) \\ &= P(A) + P(K) + P(R) - P(A \cap K) - P(A \cap R) - P(K \cap R) \\ &\quad + P(A \cap K \cap R) = 0{,}64 + 2P(R) + P(R) - 0{,}35 = 3P(R) + 0{,}29 \end{aligned}$$

Sehingga

$3P(R) + 0{,}29 = 0{,}83$, sehingga $P(R) = 0{,}18$, diperoleh $P(K) = 2P(R) = 0{,}36$

$0{,}36 = P(K) = P(K \cap A) + P(K \cap A^C) = P(K \cap A) + 0{,}11$, sehingga $P(K \cap A) = 0{,}25$

Karena $P(K \cap A) = 0{,}25$ dan $P(A \cap R) + P(A \cap K) = 0{,}35$

maka $P(A \cap R) = 0{,}35 - P(A \cap K) = 0{,}35 - 0{,}25 = 0{,}10 = 10\%$. Jadi jawaban yang benar adalah B.

20. Suatu negara menawarkan tiga tipe asuransi yaitu asuransi perang, asuransi pajak, dan asuransi birokrasi. Diantara penduduk suatu negara tersebut 55% mempunyai asuransi perang. Persentase penduduk yang memiliki asuransi pajak dan tidak yang lain adalah dua kali persentase penduduk yang memiliki asuransi birokrasi dan tidak yang lainnya. 33% penduduk tepat mempunyai dua asuransi dan untuk sebarang pilihan dua asuransi yang dipilih penduduk mempunyai probabilitas yang sama dengan pasanagan asuransi yang lainnya. Juga 20% penduduk mempunyai asuransi pajak tetapi tidak asuransi perang atau asuransi birokrasi. Sebagian kecil dari penduduk tidak memilih asuransi-asuransi tersebut. Tentukan persentase penduduk yang tidak memiliki pilihan asuransi yang ditawarkan pemerintah?
    a. 4%
    b. 5%
    c. 6%
    d. 7%
    e. 9%

    <u>Penyelesaian:</u>

    Ditentukan P = kejadian penduduk memiliki asuransi perang, J = kejadian penduduk memiliki asuransi pajak dan B = kejadian penduduk memiliki asuransi birokrasi

    Diketahui: $P(P) = 0{,}55; P\big(J - (P \cup B)\big) = 2P(B - (J \cup B));$

    $P(P \cap J) - P(P \cap J \cap B) + P(P \cap B) - P(P \cap J \cap B) + P(J \cap B) - P(P \cap J \cap B) =$ $0{,}33$ dan $P\big(J - (P \cup B)\big) = 0{,}20$

    Ditanya: $P(P \cup J \cup B)^C$

    Jawab: Karena probabilitas dua pilihan asuransi yang dipilih penduduk adalah sama, maka

    $P(P \cap J) - P(P \cap J \cap B) = P(P \cap B) - P(P \cap J \cap B) = P(J \cap B) - P(P \cap J \cap B) =$ $0{,}11$. Perhatikan bahwa

    $P(P \cup J \cup B) = P(P) + P\big(J - (P \cup B)\big) + P(B - (J \cup B)) + P(J \cap B) - P(P \cap J \cap B)$,

    karena $P(P \cup J \cup B) = 0{,}55 + 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}11 = 0{,}96.$

    Karena $P(P \cup J \cup B) = 0{,}96,$

    maka $P(P \cup J \cup B)^C = 1 - P(P \cup J \cup B) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04 = 4\%$. Jadi jawaban yang benar adalah A.

21. Fredi, Neta dan Tedi masing-masing mempunyai tiket untuk melihat suatu konser grup musik. Masing-masing mereka mungkin atau tidak mungkin melihat konser tersebut. Probabilitas mereka melihat konser adalah sebagai berikut:
    - Probabilitas paling sedikit salah satu mereka melihat konser adalah 0,95
    - Probabilitas paling sedikit dua diantara mereka melihat konser adalah 0,80 dan
    - Probabilitas mereka bertiga menghadiri konser adalah 0,50

    Jika $P(F) = P(N) = P(T)$ dan $P(F \cap N) = P(N \cap T) = P(F \cap T)$, dimana F, N dan T berturut-turut adalah kejadian Fredi, Neta dan Tedi melihat konser, maka probabilitas bahwa Fredi dan Neta melihat konser adalah

    a. 0,15
    b. 0,30
    c. 0,45
    d. 0,60
    e. 0,75

    Penyelesaian:

    Diketahui: P(paling sedikit satu diantara mereka melihat konser)= 0,95, P (paling sedikit dua diantara mereka melihat konser) = 0,80; P(mereka bertiga melihat konser) = 0,50, $P(F) = P(N) = P(T)$ dan $P(F \cap N) = P(N \cap T) = P(F \cap T)$

    Ditanya: $P(F \cap N)$

    Jawab:

    Karena P(tepat dua diantara mereka melihat konser) = P(paling sedikit dua diantara mereka melihat konser) – P(mereka bertiga melihat konser) = 0,80 – 0,50 = 0,30

    Karena P(tepat dua diantara mereka melihat konser) = 0,30, maka $P(F \cap N \cap T^C) + P(F \cap N^C \cap T) + P(F^C \cap N \cap T) = 0{,}30$, karena tiga probabilitas tersebut simterik sehingga $P(F \cap N \cap T^C) = P(F \cap N^C \cap T) = P(F^C \cap N \cap T)$, sehingga

    $P(F \cap N \cap T^C) = 0{,}10$

    Karena $P(F \cap N \cap T^C) = 0{,}10$, maka $P(F \cap N) = P(F \cap N \cap T^C) + P(F \cap N \cap T) = 0{,}1 + 0{,}5 = 0{,}6$

    Jadi jawaban yang benar adalah D

1.4.Latihan Soal Ujian Aktuaris dan Pembahasannya

1. **Soal Ujian Aktuaris A20/27 November 2018/No.1**

   Seorang peneliti yang fokus pada penyakit jantung, telah mengumpulkan data dari 40.000 pasien yang mengalami serangan jantung. Peneliti telah mengidentifikasi bahwa terdapat tiga variabel yang berhubungan erat dengan penyakit jantung, yaitu perokok, kecanduan alkohol dan gaya hidup yang tidak sehat (tidak berolaharaga atau kurang aktifitas fisik). Berikut adalah data dari 40.000 pasien:

   - 29.000 adalah perokok
   - 25.000 adalah pasien dengan kecanduan alkohol
   - 30.000 adalah pasien dengan gaya hidup tidak sehat
   - 22.000 adaah perokok dan kecanduan alkohol
   - 24.000 adalah perokok dan memiliki gaya hidup yang tidak sehat
   - 20.000 adalah pasien dengan kecanduan alkohol dan memiliki gaya hidup tidak sehat
   - 20.000 adalah perokok, kecanduan alkohol dan memiliki gaya hidup tidak sehat

   Tentukanlah berapa banyak jumlah pasien perokok tetapi tidak kecanduan alkohol

   a. 38.000
   b. 4.000
   c. 6.000
   d. 7.000
   e. 8.000

   Penyelesaian:

   Ditentukan P = kejadian pasien adalah perokok, A = kejadian bahwa pasien adalah kecanduan alkohol dan S = kejadian bahwa pasien memiliki gaya hidup tidak sehat

   Diketahui: $n(P) = 29.000, n(P \cap A) = 22.000$

   Ditanya: $n(P \cap A^C)$

   Jawab: Karena $n(P) = n(P \cap A) + n(P \cap A^C)$, maka diperoleh $n(P \cap A^C) = n(P) - n(P \cap A) = 29.000 - 22.000 = 7.000$. Jadi banyak pasien perokok tetapi tidak kecanduan alkohol adalah 7.000 orang. Jadi jawaban yang benar adalah D.

2. **Soal Ujian Aktuaris A20/ 27 November 2018/ No.2**

Sebuah survey atas 1000 penggemar olahraga yang mengidentifikasikan bahwa mereka adalah penggmar tenis atau bulutangkis atau kedua-duanya.

- 800 mengidentifikasikan bahwa mereka adalah penggemar tenis
- 600 mengidentifikasikan bahwa mereka adalah penggemar bulutangkis

Berdasarkan sampel tersebut, hitunglah peluang bahwa seorang pengemar olahraga yang bukan pengemar tenis dengan diberitahukan bahwa dia adalah pengemar bulutangkis

a. 1/5
b. ¼
c. 1/3
d. ½
e. 1

<u>Penyelesaian:</u>

Ditentukan T = kejadian bahwa penggemar olahraga mengidentifikasikan bahwa penggemar tenis dan B = kejadian bahwa penggemar olahraga mengidentifikasikan bahwa penggemar bulutangkis

Diketahui: $n(T) = 800, n(b) = 600$ dan $n(T \cup B) = 1000$

Ditanya: $P(T^C \cap B)$

Jawab: Karena $P(T^C \cap B) = \frac{n(T^C \cap B)}{n(B)} = \frac{n(B) - n(T \cap B)}{n(B)}$, sedangkan

$n(T \cap B) = n(T) + n(B) - n(T \cup B) = 800 + 600 - 1000 = 400$

Sehingga diperoleh $P(T^C \cap B) = \frac{n(T^C \cap B)}{n(B)} = \frac{n(B) - n(T \cap B)}{n(B)} = \frac{600-400}{600} = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}$. Jadi jawaban yang benar adalah C.

3. **Soal Ujian Aktuaris A20/ 27 November 2018/ No. 3**

Diketahui $P(A \cup B) = 0{,}5$ dan $P(A \cup B^C) = 0{,}8$. Tentukan $P(A)$

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui: $P(A \cup B) = 0{,}5$ dan $P(A \cup B^C) = 0{,}8$

Ditanya: $P(A)$

Jawab: Karena $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, maka

$0{,}5 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, dan

$$0{,}8 = P(A \cup B^C) = P(A) + P(B^C) - P(A \cap B^C) \quad +$$

$$1{,}6 = 2P(A) + P(B) + P(B^C) - (P(A \cap B) + P(A \cap B^C))$$

$1{,}3 = 2P(A) + 1 - P(A)$, karena $P(B) + P(B^C) = 1$ dan $P(A \cap B) + P(A \cap B^C) = P(A)$

Sehingga diperoleh $P(A) = 0{,}3$

4. **Soal Ujian Aktuaris A20/ 27 November 2018/ No.4**

Sebuah survey terhadap menonton pada suatu grup selama satu tahun terakhir adalah sebagai berikut:

- 28% menonoton bulutangkis
- 29% menonoton basket
- 19% menonton sepakbola
- 14% menonton bulutangkis dan basket
- 12% menonton basket dan sepakbola
- 10% menonton bulutangkis dan sepakbola
- 8% menonton ketiga olahraga tersebut

Hitunglah persentase dari grup yang tidak menonton ketiga olahraga tersebut selama satu tahun terakhir

a. 24%
b. 36%
c. 41%
d. 52%
e. 60%

Penyelesaian:

Ditentukan T = kejadian menonton bulutangkis, B = kejadian menonton basket dan S = kejadian menonton sepakbola

Diketahui: $n(T) = 28\%, n(B) = 29\%, n(S) = 19\%, n(T \cap B) = 14\%, n(B \cap S) = 12\%, n(T \cap S) = 10\%$ dan $n(T \cap B \cap S) = 8\%$

Ditanya: $n(T \cap B \cap S)^C$

Jawab: Karena $n(T \cup B \cup S)^C = 1 - n(T \cup B \cup S)$, maka

$$\begin{aligned} n(T \cup B \cup S)^C &= 1 - n(T \cup B \cup S) \\ &= 1 - (n(T) + n(B) + n(S) - n(T \cap B) - n(B \cap S) - n(T \cap S) \\ &\quad + n(T \cap B \cap S)). \\ &= 1 - (28\% + 29\% + 19\% - 14\% - 12\% - 10\% + 8\%) \end{aligned}$$

$= \ 52\%$

Jadi jawaban yang benar adalah D.

5. **Ujian Aktuaris A20/ 27 November 2018/ No.5/ 21 November 2017/ No.30/ 22 November 2016/ No.3**

   Misalkan A, B dan C adalah kejadian saling bebas (mutually independent) dengan $P(A) = 0{,}5; P(B) = 0{,}6; P(C) = 0{,}1$. Hitunglah $P(A^C \cup B^C \cup C)$

   a. 0,48
   b. 0,69
   c. 0,71
   d. 0,73
   e. 0,98

   <u>**Penyelesaian:**</u>

   Diketahui: $P(A) = 0{,}5; P(B) = 0{,}6; P(C) = 0{,}1$

   Ditanya: $P(A^C \cup B^C \cup C)$

   Jawab: Karena $P(A^C \cup B^C \cup C) = 1 - P(A^C \cup B^C \cup C)^C$, maka

$P(A^C \cup B^C \cup C) = 1 - P(A^C \cup B^C \cup C)^C$, karena $P(A^C) = 1 - P(A)$

$= 1 - P(A \cap B \cap C^C)$, sifat demorgan

$= 1 - P(A)P(B)P(C^C)$, A, B dan C kejadian saling bebas

$= 1 - P(A)P(B)(1 - P(A))$, karena $P(A^C) = 1 - P(A)$

$= 1 - (0{,}5)(0{,}6)(1 - 0{,}1)$

$= 1 - 0{,}27$

$= 0{,}73$

   Jadi jawaban yang benar adalah D.

6. **Ujian Aktuaris A20/ 22 Mei 2018/ No.1**

   Berikut ini pernyataan mengenai probabilitas:

   i. $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$

   ii. $\Pr(A) = \Pr(A \cap E) + \Pr(A \cup E^C)$

   iii. $\Pr(A \cup B \cup C) = \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(A \cup B) - \Pr(A \cup C) - \Pr(B \cup C) + \Pr(A \cap B \cap C)$

   iv. $\Pr(E^C) = 1 - \Pr(E)$

   Pilihlah pernyataan yang tidak benar dari beberapa pernyataan tersebut

   a. i dan ii

b. ii dan iii
c. ii dan iv
d. i, ii dan iii
e. i, ii, iii dan iv

Penyelesaian:

Pernyataan i adalah benar, pernyataan ii tidak benar seharusnya yang benar adalah $\Pr(A) = \Pr(A \cap E) + \Pr(A \cap E^C)$, pernyataan iii tidak benar seharusnya yang benar adalah $\Pr(A \cup B \cup C) = \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap C) - \Pr(B \cap C) + \Pr(A \cap B \cap C)$ dan pernyataan iv adalah benar. Sehingga jawaban yang benar adalah B.

7. **Ujian Aktuaris A20/ 22 Mei 2018/ No.3**

Sebuah polis asuransi gigi memberikan perlindungan untuk 3 prosedur yaitu perawatan gigi (kawat gigi), tambal gigi dan cabut gigi. Selama masa polis, peluang dari pemegang polis melakukan perawatan gigi adalah sebagai berikut:

Peluang melakukan kawat gigi adalah $\frac{1}{2}$

Peluang melakukan kawat gigi atau tambal gigi adalah $\frac{2}{3}$

Peluang melakukan kawat gigi atau cabut gigi adalah$\frac{3}{4}$

Peluang melakukan tambal gigi dan cabut gigi adalah $\frac{1}{8}$

Kebutuhan untuk melakukan kawat gigi adalah bersifat saling bebas "*independent*" dari kebutuhan tambal gigi dan juga bersifat bebas dari kebutuhan cabut gigi. Hitunglah peluang bahwa pemegang polis akan membutuhkan tambal gigi atau cabut gigi selama masa polis.

A. 7/24
B. 3/8
C. 2/3
D. 17/24
E. 5/6

Penyelesaian:

Ditentukan K = kejadian melakukan kawat gigi, T = kejadian melakukan tambal gigi dan C = kejadian melakukan cabut gigi

Diketahui: $P(K)=\frac{1}{2}, P(K\cup T)=\frac{2}{3}, P(K\cup C)=\frac{3}{4}$ dan $P(T\cap C)=\frac{1}{8}$, dengan K *independent* terhadap T dan C

Ditanya: $P(T\cup C)$

Jawab: Karena $P(T\cup C)=P(T)+P(C)-P(T\cap C)$, maka perlu ditentukan $P(T)$ dan $P(C)$. Karena $P(K)=\frac{1}{2}, P(K\cup T)=\frac{2}{3}$, dan K dan T independet, maka

$P(K\cup T)=P(K)+P(T)-P(K)P(T)$, sehingga

$$\begin{aligned} P(K\cup T) &= P(K)+P(T)-P(K)P(T) \\ \frac{2}{3} &= \frac{1}{2}+P(T)-\frac{1}{2}P(T) \\ \frac{1}{3} &= P(T) \end{aligned}$$

Diperoleh $P(t)=\frac{1}{9}$

Dengan prosedur yang sama ditentukan $P(C)$, karena $P(K)=\frac{1}{2}, P(K\cup C)=\frac{3}{4}$ dan dengan K *independent* terhadap C, maka

$$\begin{aligned} P(K\cup C) &= P(K)+P(C)-P(K)P(C) \\ \frac{3}{4} &= \frac{1}{2}+P(C)-\frac{1}{2}P(C) \\ \frac{1}{2} &= P(C) \end{aligned}$$

Karena $P(T)=\frac{1}{9}, P(C)=\frac{1}{6}$ dan $P(T\cap C)=\frac{1}{8}$, maka

$$\begin{aligned} P(T\cup C) &= P(T)+P(C)-P(T\cap C) \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8} \\ &= \frac{6+9-3}{18} \\ &= \frac{12}{18} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Jadi jawaban yang benar adalah C.

8. **Ujian Aktuaris A20/ 22 Mei 2018/ No. 11/ 16 Mei 2017/ No.1**

   Sebuah perusahaan asuransi mobil memiliki 1000 pemegang polis. Setiap pemegang polis diklasifikasikan sebagai berikut:

   - Muda atau tua

- Lelaki atau perempuan
- Menikah atau belum menikah

Dari pemegang polis tersebut, sebanyak 3000 adalah muda, 4600 adalah lelaki, dan 7000 sudah menikah. Pemegang polis juga dapat dikalsifikasikan sebagai 1320 adalah lelaki muda dan 1400 adalah orang muda yang sudah menikah. Sebanyak 600 dari pemegang polis adalah lelaki muda sudah menikah. Berapa banyak dari pemegang polis adalah perempuan muda dan belum menikah?

a. 280
b. 423
c. 486
d. 880
e. 896

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui: $n(muda) = 3000, n(lelaki\ muda) = 1320, n(muda\ sudah\ menikah) = 1400$ dan $n(lelaki\ muda\ sudah\ menikah) = 600$

Ditanya: n(perempuan muda dan belum menikah)

Jawab:

Banyak perempuan muda belum menikah diperoleh dari banyak orang muda belum menikah dikurangi banyak lelaki muda belum menikah.

Karena $n(orang\ muda\ blm\ nikah) = n(muda) - n(mudah\ sudah\ nikah)$, maka

$$\begin{aligned} n(orang\ muda\ blm\ nikah) &= n(muda) - n(mudah\ sudah\ nikah) \\ &= 3000 - 1400 \\ &= 1600 \end{aligned}$$

Karena $n(lelaki\ muda\ blm\ nikah) = n(lelaki\ muda) - n(lelaki\ muda\ nikah)$, maka

$$\begin{aligned} n(lelaki\ muda\ blm\ nikah) &= n(lelaki\ muda) - n(lelaki\ muda\ nikah), \\ &= 1320 - 600 \\ &= 720 \end{aligned}$$

Jadi

$$n(\text{perempuan muda belum nikah}) = n(muda\ blm\ nikah) - n(lelaki\ muda\ blm\ nikah).$$

$= 1600 - 720$

$= 880$

Jadi jawaban yang benar adalah D.

9. **Ujian Aktuaris A20/ 21 November 2017/ No.24/ 16 Mei 2017/ No.25**

Kejadian X, Y dan Z memenuhi persamaan berikut:

$X \cap Y^C = \emptyset; Y \cap Z^C = \emptyset; P(X^C \cap Y) = a, P(Y^C \cap Z) = b; P(Z) = c.$ Tentukan $P(X)$ dalam a, b dan c

a. $a + b + c$

b. $a + b - c$

c. $c + b - a$

d. $c + a - b$

e. $c - b - a$

Penyelesaian:

Diketahui: $X \cap Y^C = \emptyset; Y \cap Z^C = \emptyset; P(X^C \cap Y) = a, P(Y^C \cap Z) = b; P(Z) = c$

Ditanya: $P(X)$

Jawab:

Karena $P(\emptyset) = 0$ dan $P(A^C) = 1 - P(A)$, maka

0	=	$P(\emptyset)$	, karena $P(\emptyset) = 0$
	=	$P(X \cap Y^C)$	, karena $X \cap Y^C = \emptyset$
	=	$1 - P(X \cap Y^C)^C$	, karena $P(A) = 1 - P(A^C)$,
	=	$1 - P(X^C \cup Y)$	, sifat demorgan
	=	$1 - (P(X^C) + P(Y) - P(X^C \cap Y))$	, karena $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
	=	$1 - (1 - P(X) + P(Y) - P(X^C \cap Y))$	, karena $P(A^C) = 1 - P(A)$
	=	$1 - (1 - P(X) + P(Y) - a)$	, karena $P(X^C \cap Y) = a$

Diperoleh $P(X) - P(Y) + a = 0$, disebut persamaan 1).

Begitu juga

0	=	$P(\emptyset)$	, karena $P(\emptyset) = 0$
	=	$P(Y^C \cap Z)$	, karena $Y^C \cap Z = \emptyset$
	=	$1 - P(Y^C \cap Z)^C$	, karena $P(A) = 1 - P(A^C)$,
	=	$1 - P(Z^C \cup Y)$	, sifat demorgan
	=	$1 - (P(Z^C) + P(Y) - P(Z^C \cap Y))$	, karena $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

= $1-(1-P(Z)+P(Y)-P(Z^C\cap Y))$, karena $P(A^C)=1-P(A)$

= $1-(1-P(Z)+P(Y)-b)$, karena $P(Z^C\cap Y)=b$

Diperoleh $P(Z)-P(Y)+b=0$, disebut persamaan 2)

Kurangkan persamaan 1) dan 2), sehingga diperoleh $P(X)+a-c-b=0$, sehingga $P(X)=c+b-a$. Jadi jawaban yang benar adalah C.

10. **Ujian Aktuaris A20/ 21 November 2017/ No. 29/ 22 November 2016/ No.3**

Seorang asisten aktuaris yang sedang mengamati data statistik tentang kecenderungan tren pembelian asuransi oleh pemilik mobil mendapati beberapa kesimpulan sebagi berikut:

a. Pemilik kendaraan memiliki kecenderungan untuk membeli asuransi perlindungan kecelakaan diri dua kali lebih besar daripada perlindungan orang ketiga
b. Kejadian pembelaian asuransi kecelakaan diri ini ternyata saling bebas dengan kejadian pembelian asuransi perlindungan orang ketiga
c. Peluang bahwa seorang pemilik mobil membeli kedua perlindungan tersebut pada waktu yang sama adalah 0,15

Hitung peluang bahwa pemilik mobil tidak membeli kedua jenis perlindungan asuransi kecelakaan diri dan orang ketiga?

a. 0,18
b. 0,33
c. 0,48
d. 0,67
e. 0,82

<u>Penyelesaian:</u>

Ditentukan D = kejadian pemilik mobil membeli asuransi perlindungan kecelakaan diri, T = kejadian pemilik mobil membeli asuransi perlindungan orang ketiga,

Diketahui: $P(D)=2P(T), P(D\cap T)=P(D)P(T)$ dan $P(D\cap T)=0{,}15$

Ditanya: $P(D^C\cap T^C)$

Jawab: Karena D dan T *independen*t, maka D^C dan T^C juga *indenpent*. Karena D dan T *independen*t, $P(D)=2P(T)$ dan $P(D\cap T)=0{,}15$, maka

0,15 = $P(D\cap T)$

= $P(D)P(T)$, karena D dan T *independen*t

= $2P(T)P(T)$, karena $P(D)=2P(T)$

$= \quad 2(P(T))^2$

Karena $2(P(T))^2 = 0{,}15$, maka$P(T) = \sqrt{0{,}75}$ dan $P(D) = 2\sqrt{0{,}75}$.

Karena maka$P(T) = \sqrt{0{,}75}$ dan $P(D) = 2\sqrt{0{,}75}$, D dan T $independen$t, maka D^C dan T^C juga *indenpent*, sehingga

$$P(D^C \cap T^C) = P(D^C)P(T^C) = (1 - P(A)(1 - P(D)$$

$$= \left(1 - \sqrt{0{,}75}\right)\left(1 - 2\sqrt{0{,}75}\right) = 0{,}33.$$

Jawaban yang benar adalah B.

11. **Ujian Aktuaris A20/ 16 Mei 2017/ No.1**

Survei dilakukan terhadap 1000 orang dan diketahui bahwa 80% orang menyukai olahraga lari dan 60% menyukai bersepeda, dan seluruhnya menyukai paling sedikit satu aktivitas tersebut. Berapa peluang sesorang dalam survei ini yang diambil secara acak menyukai bersepeda namun tidak menyukai olahraga lari?

a. 0
b. 0,1
c. 0,2
d. 0,3
e. 0,4

Penyelesaian:

Terlebih dahulu ditetapkan bahwa J = prosentase orang yang suka olahraga jalan kaki, S = prosentase orang yang suka olahraga bersepeda, maka

Diketahui: $P(J) = 70\% = 0{,}8$, $P(S) = 60\% = 0{,}6$ dan $P(J \cup S) = 1$

Ditanya: $P(J^C \cap S)$

Jawab: Karena $P(S) = P(S \cap J^C) + P(S \cap J)$,

dan $P(S \cap J) = P(S) + P(J) - P(J \cup S)$,

maka $P(J^C \cap S) = P(S) - \left(P(S) + P(J) - P(J \cup S)\right) = 0{,}6 - (0{,}6 + 0{,}7 - 1) = 0{,}3$

Jadi jawaban yang benar adalah D.

12. **Ujian Aktuaris A20/ 22 November 2016/ No. 1**

Peluang dari hasil suatu kunjungan ke kantor *Primary Care Physician* (PCP) untuk tidak melakukan tes laboratorium atau rujukan spesialis adalah 35%. Dari seluruh yang datang ke kantor PCP, 30% dirujuk ke spesialis dan 40% membutuhkantes laboratorium. Tentukan peluang dari hasil kunjungan ke kantor PCP adalah tes laboratorium dan rujukan ke spesialis?

a. 0,05
b. 0,12
c. 0,18
d. 0,25
e. 0,35

Penyelesaian:

Ditentukan L = kejadian melakukan tes laboratorium dan S = kejadian rujukan ke spesialis,

Diketahui: $P(L^C \cap S^C) = 0{,}35; P(S) = 0{,}3$ dan $P(L) = 0{,}4$

Ditanya: $P(S \cap L)$

Jawab: Karena $0{,}3 = P(L^C \cap S^C) = P(L \cup S)^C = 1 - P(L \cup S)$,

maka $P(L \cup S) = 1 - P(L \cup S)^C = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

Karena $P(L \cup S) = P(L) + P(S) - P(L \cap S)$, maka

$P(L \cap S) = P(L) + P(S) - P(L \cup S) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}65 = 0{,}05$. Jadi jawaban yang benar adalah A.

13. **Ujian Aktuaris A20/ 22 November 2016/ No.2**

Perusahaan asuransi menawarkan program kesehatan ke pergawai-pegawai dari suatu perusahaan besar. Sebagai bagian dari program, masing-masing pegawai dapat memilih dua perlindungan tambahan (*supplementary coverage*) A, B dan C; atau tidak memilih perlindungan tambahan sama sekali. Proporsi pegawai perusahaan yang memilih perlindungan A, B dan C adalah ¼, 1/3, dan 5/12. Tentukan peluang secara acak dipilih seorang pegawai yang tidak memilih perlindungan tambahan?

a. 0
b. 47/144
c. ½
d. 97/144
e. 7/9

Penyelesaian:

Diketahui: $P(A \cap B) + P(A \cap C) = \frac{1}{4}, P(B \cap A) + P(B \cap C) = \frac{1}{3}$

dan $P(C \cap A) + P(C \cap B) = \frac{5}{12}$

Ditanya: peluang seorang pegawai tidak memilih perlindungan tambahan

Jawab:

$P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap A) + P(B \cap C) + P(C \cap A) + P(C \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = 1$, sehingga $2\big(P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A)\big) = 1$,

diperoleh $\big(P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A)\big) = \frac{1}{2}$, ini menunjukkan bahwa peluang pegawai memilih perlindungan tambahan adalah ½ , maka peluang pegawai tidak memilih perlindungan tambahan adalah ½ . Jadi jawaban yang benar adalah C

14. **Ujian Aktuaris A20/ 22 November 2016/ No. 24**

Sebuah perusahaan asuransi jiwa membuat klasifikasi calon pemegang polis asuransi berdasarkan kriteria berikut:

- L = Pendaftar adalah laki-laki
- R = Pendaftar adalah pemilik rumah

Dari populasi calon pemegang polis asuransi jiwa tersebut, perusahaan asuransi telah mengidentifikasi beberapa informasi berikut:

- 40% pendaftar adalah laki-laki
- 40% pendfatar adalah pemilik rumah
- 20% pendaftar adalah pemilik rumah yang berjenis kelamin perempuan

Tentukan persentase calon pemegang polis yang merupakan laki-laki yang tidak memiliki rumah?

a. 10%
b. 20%
c. 30%
d. 40%
e. 50%

Penyelesaian:

Diketahui: $P(L) = 0{,}4; P(R) = 0{,}4$ dan $P(R \cap L^C) = 0{,}2$

Ditanya: $P(L \cap R^C)$

Jawab: Karena $P(L \cap R^C) = P(L^C \cup R)^C = 1 - P(L^C \cup R)$, maka

$$
\begin{aligned}
P(L \cap R^C) &= 1 - P(L^C \cup R) \\
&= 1 - (P(L^C) + P(R) - P(R \cap L^C)) \\
&= 1 - (\big(1 - P(L)\big) + P(R) - P(R \cap L^C)) \\
&= 1 - ((1 - 0{,}4) + 0{,}4 - 0{,}2) \\
&= 1 - (0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}2)
\end{aligned}
$$

$= \quad 0{,}2 = 20\%$

Jadi jawaban yang benar adalah B.

15. **Ujian Aktuaris A20/ 24 Maret 2015/ No.1**

Sebuah perusahaan asuransi jiwa yang masih baru berdiri mempunyai 20.000 pemegang polis. Setiap pemegang polis diklasifikasikan sebagai berikut:

a. *Medical* dan *non medical*
b. Pria atau wanita
c. Anak-anak atau dewasa

Dari para pemegang polis ini diketahui:

- Pria dan *medical* adalah 3000 pemegang polis
- *Medical* dan anak-anak adalah 2500 pemegang polis
- Pria dan anak-anak adalah 3000 pemegang polis
- *Medical*, pria dan anak-anak adalah 1000 pemegang polis
- *Medical* (melalui pemeriksaan kesehatan) adalah 5000 pemegang polis
- Pemegang polis pria sebanyak 10.000 pemegang polis
- Pemegang polis anak-anak adalah 12.000 pemegang polis

Berapakah dari pemegang polis tersebut adalah wanita dewasa melalui proses pemeriksaan kesehatan *(medical)*?

a. 1.500
b. 500
c. 2.500
d. 880
e. 1.760

Penyelesaian:

Ditentukan M = kejadian pemegang polis medical, P = kejadian pemegang polis pria dan D = kejadian pemegang polis dewasa,

Diketahui: $n(P \cap M) = 3000, n(M \cap D^C) = 2500, n(M \cap P \cap D^C) = 1000, n(M) = 5000, n(P) = 10.000$, dan $n(D^C) = 12.000$.

Ditanya: $n(M \cap P^C \cap D)$

Jawab: Karena $n(M \cap P^C \cap D) = n(M \cap D) - n(M \cap D \cap P)$, sehingga

$$n(M \cap P^C \cap D) = n(M \cap D) - n(M \cap D \cap P)$$

$$= n(M \cap D) - n(M \cap D \cap P)$$

$$= (n(M) - n(M \cap D^C)) - (n(P \cap M) - n(M \cap P \cap D^C))$$
$$= (5000 - 2500) - (3000 - 1000)$$
$$= 500$$

Jadi jawaban yang benar adalah B.

16. **Ujian Aktuaris A20/ 24 Maret 2015/ No.12**

Diketahui informasi sebagai berikut dari pasien yang datang ke dokter di sebuah rumah sakit:

- 35% tidak memerlukan pemeriksaan laboratorium dan tidak memerlukan kunjungan ke dokter spesialis
- 30% memerlukankunjungan ke dokter spesialis
- 40% memerlukan pemeriksaan laboratorium

Hitunglah kemungkinan dari seorang pasien yang datang ke dokter jaga rumah sakit tersebut memerlukan pemeriksaan laboratorium dan kunjungan ke dokter spesialis?

a. 0,25
b. 0,35
c. 0,05
d. 0,12
e. 0,18

Penyelesaian:

Ditentukan D = kejadian pasien berkunjung ke dokter spesialis dan L = kejadian pasien berkunjung ke laboratorium

Diketahui: $n(D) = 30\% = 0{,}3; n(L) = 40\% = 0{,}4$ dan $n(D^C \cap L^C) = 35\% = 0{,}35$

Ditanya: $n(D \cap L)$

Jawab: Karena $n(D^C \cap L^C) = n(D \cup L)^C = 100\% - n(D \cup L)$, maka

$$\begin{aligned} 35\% &= 100\% - n(D \cup L) \\ &= 100\% - (n(D) + n(L) - n(D \cap L)) \\ &= 100\% - 30\% - 40\% + n(D \cap L) \\ &= 30\% + n(D \cap L) \end{aligned}$$

Diperoleh $35\% = 30\% + n(D \cap L)$, sehingga $n(D \cap L) = 5\% = 0{,}05.$ Jadi jawaban yang benar adalah C.

17. **Ujian Aktuaris A20/ 24 Maret 2015/ No.19**

Sebuah perusahaan asuransi kendaraan bermotor mempunyai portofolio nasabah seperti dibawah ini:

- Nasabah mengasuransikan paling sedikit 1 kendaraan
- 60% dari nasabah mengasuranssikan lebih dari satu kendaraan
- 25% dari nasabah mengasuransikan kendaraan SUV
- 20% dari nasabah mengasuransikan lebih dari 1 kendaraan mengarusansikan mengasuransikan kendaraan SUV

Hitunglah probabilitas dari seorang nasabah yang dipilih secara acak mengasuransikan hanya 1 kendaran dan bukan SUV?

a. 0,205
b. 0,270
c. 0,880
d. 0,320
e. 0,600

Penyelesaian:

Ditentukan S = kejadian nasabah mengasuransikan hanya 1 kendaraan dan

M = kejadian nasabah mengasuransikan kendaraan SUV

Diketahui: $n(S^C) = 60\% = 0{,}6; n(M) = 25\% = 0{,}25$ dan $n(S^C \cap M) = 20\% = 0{,}2$

Ditanya: $P(S \cap M^C)$

Jawab: Karena $P(S \cap M^C) = \frac{n(S \cap M^C)}{n(S)}$, ditentukan terlebih dahulu $n(S \cap M^C)$. Karena $n(S) = 100\% - n(S^C) = 100\% - 60\% = 40\% = 0{,}4$.

18. **Ujian Aktuaris A20/ 24 Maret 2015/ No 22**

Diketahui informasi pembayaran klaim Rumah Sakitndari sebuah asuransi kesehatan adalah sebagai berikut:

- 85% klaim termasuk biaya UGD dan ruang operasi
- 25% dari total klaim tidak termasuk biaya UGD
- Timbulnya biaya UGD tidak berhubungan dengan timbulnya biaya ruangan operasi (*independent event*)

Hitunglah probabilitas dari sebuah klaim pada asuransi ini termasuk biaya ruangan operasi!

a. 0,60
b. 0,24

c. 0,80

d. 0,40

e. 0,76

Penyelesaian:

Ditentukan U = kejadian biaya klaim termasuk pada biaya ruangan UGD,

O = kejadian biaya klaim termasuk pada biaya ruang operasi.

Diketahui: $P(U \cup O) = 85\%; P(U^C) = 25\%$ dan U dan O saling bebas

Ditanya: $P(O)$

Jawab: Karena $P(U \cup O) = P(U) + P(O) - P(U \cap O)$, maka

$P(U \cup O)$	=	$P(U) + P(O) - P(U \cap O)$	,
85%	=	$P(U) + P(O) - P(U)P(O)$	, karena U dan O saling bebas
85%	=	$75\% + P(O) - 75\%P(O)$	, karena $P(U) = 1 - 25\% = 75\%$
$85\% - 75\%$	=	$25\%P(O)$	
$\frac{10\%}{25\%}$	=	$P(O)$	
$0{,}40$	=	$P(O)$	

Jadi jawaban yang benar adalah D

19. **Ujian Aktuaris A20/ 24 Maret 2015/ No.29**

Diketahui A, B dan C adalah kejadian saling berdiri sendiri (*mutually independent event*) dengan probabilitas sebagai berikut:

- $P(A) = 0{,}6$
- $P(B) = 0{,}4$
- $P(C) = 0{,}2$

Hitunglah $P(A^C \cup B^C \cup C)$

a. 0,730

b. 0,192

c. 0,808

d. 0,270

e. Tidak ada jawaban yang benar

Penyelesaian:

Diketahui: $P(A) = 0{,}6; P(B) = 0{,}4; P(C) = 0{,}2$

Ditanya: $P(A^C \cup B^C \cup C)$

Jawab: Karena $A^C \cup B^C \cup C = (A \cap B \cap C^C)^C$, maka

$P(A^C \cup B^C \cup C) = P(A \cap B \cap C^C)^C = 1 - P(A \cap B \cap C^C)$. Karena A, B dan C adalah kejadian saling berdiri sendiri, maka

$P(A^C \cup B^C \cup C)$ = $1 - P(A \cap B \cap C^C)$.
= $1 - P(A)P(B)P(C^C)$, karena A, B dan Ckejadian saling berdiri sendiri
= $1 - P(A)P(B)(1 - P(C))$
= $1 - ((0,6)(0,4)(0,8))$
= $0,808$

Jadi jawaban yang benar adalah C.

20. **Ujian Aktuaris A20/ 25 November 2015/ No.3**

Jika ruang sampel ζ = $C_1 \cup C_2$ dan jika $\Pr(C_1) = 0,7$ dan $\Pr(C_2) = 0,5$. Hitung $\Pr(C_1 \cap C_2)$

a. 0,1
b. 0,2
c. 0,3
d. 0,4
e. 0,5

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui : $\zeta = C_1 \cup C_2$, $\Pr(C_1) = 0,7$ dan $\Pr(C_2) = 0,5$

Ditanya: $\Pr(C_1 \cap C_2)$

Jawab: Karena $C_1 \cup C_2 = C_1 + C_2 - C_1 \cap C_2$,

sehingga $P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2)$

$P(C_1 \cup C_2)$ = $P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2)$
1 = $0,7 + 0,5 - P(C_1 \cap C_2)$
1 = $1,2 - P(C_1 \cap C_2)$
$P(C_1 \cap C_2)$ = $1,2 - 1$
$P(C_1 \cap C_2)$ = $0,2$

Jadi jawaban yang benar B

21. **Ujian Aktuaris A20/ 26 Maret 2013/ No.5**

Misal kejadian A dan B saling bebas dengan $\Pr(A \cap B^C) = 0,2$ dan $\Pr(A^C \cap B) = 0,3$. Tentukan $\Pr(A \cup B)$

a. 0,8 atau 0,9

b. 0,7 atau 0,8

c. 0,5 atau 0,6

d. 0,2 atau 0,3

Penyelesaian:

Diketahui: A dan B saling bebas dengan $\Pr(A \cap B^C) = 0{,}2$ dan $\Pr(A^C \cap B) = 0{,}3$.

Ditanya: $\Pr(A \cup B)$

Jawab:

A dan B saling bebas dan $\Pr(A \cap B^C) = 0{,}2$, maka $\Pr(A)\Pr(B^C) = 0{,}2$. Karena A dan B saling bebas dengan $\Pr(A^C \cap B) = 0{,}3$, maka $\Pr(A^C)\Pr(B) = 0{,}3$. Karena $\Pr(A)\Pr(B^C) = 0{,}2$, maka $\Pr(A) = \frac{0{,}2}{\Pr(B^C)}$. Karena $\Pr(A) = \frac{0{,}2}{\Pr(B^C)}$ dan $\Pr(A^C)\Pr(B) = 0{,}3$, maka $\left(1 - \frac{0{,}2}{\Pr(B^C)}\right)\left(1 - Pr(B^C)\right) = 0{,}3$, sehingga diperoleh persamaan $1 - Pr(B^C) - \frac{0{,}2}{\Pr(B^C)} + 0{,}2 = 0{,}3$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
1 - Pr(B^C) - \frac{0{,}2}{\Pr(B^C)} - 0{,}1 &= 0 \\
Pr(B^C) - (\Pr(B^C))^2 - 0{,}2 - 0{,}1\Pr(B^C) &= 0 \\
(\Pr(B^C))^2 - 0{,}9\Pr(B^C) + 0{,}2 &= 0 \\
10(\Pr(B^C))^2 - 9\Pr(B^C) + 2 &= 0 \\
(5\Pr(B^C) - 2)(2\Pr(B^C) - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Diperoleh $\Pr(B^C) = \frac{2}{5}$ dan $\Pr(B^C) = \frac{1}{2}$, sehingga $\Pr(B) = \frac{3}{5}$ atau $\Pr(B) = \frac{1}{2}$. Karena $\Pr(B) = \frac{3}{5}$ atau $\Pr(B) = \frac{1}{2}$, maka $\Pr(A) = \frac{1}{2}$ atau $\Pr(A) = \frac{2}{5}$. Karena $\Pr(B) = \frac{3}{5}$ dan $\Pr(A) = \frac{1}{2}$, maka $\Pr(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5}.\frac{1}{2} = \frac{6+5-3}{10} = \frac{8}{10} = 0{,}8$. Karena $\Pr(B) = \frac{1}{2}$ dan $\Pr(A) = \frac{2}{5}$, maka $\Pr(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2}.\frac{2}{5} = \frac{5+4-2}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$. Jadi jawaban yang benar adalah B.

22. **Ujian Aktuaris A20/ 25 September 2012/ No.5**

Pada survei tahun lalu mengenai mata pelajaran yang disukai siswa-siswi di suatu kelas, diperoleh informasi sebagai berikut:

- 30% menyukai matematika dasar
- 30% menyukai statistika dasar
- 20% menyukai matematika aktuaria
- 20% menyukai matematika dasar dan statistika dasar

- 15% menyukai statistika dasar dan matematika aktuaria
- 12% menyukai matematika dasar dan matematika aktuaria
- 10% menyukai ketiga mata pelajaran

Hitunglah persentase dari siswa-siswi yang tidak menyukai ketiga mata pelajaran tersebut tahun lalu

a. 63
b. 57
c. 43
d. 37

Penyelesaian:

Ditentukan M = kejadian siswa-siswi yang menyukai matematika dasar, S = kejadian siswa-siswi menyukai statistika dasar dan A = kejadian siswa-siswi menyukai matematika aktuaria

Diketahui: $P(M) = 30\%; P(S) = 30\%; P(A) = 20\%, P(M \cap S) = 20\%, P(S \cap A) = 15\%; P(M \cap A) = 12\%$ dan $P(M \cap S \cap A) = 10\%$

Ditanya: $P(M \cup S \cup A)^C$

Jawab: Karena $P(M \cup S \cup A)^C = 1 - P(M \cup S \cup A)$, maka

$$
\begin{aligned}
P(M \cup S \cup A)^C &= 1 - P(M \cup S \cup A), \\
&= 1 - (P(M) + P(S) + P(A) - P(M \cap S) - P(M \cap A) \\
&\quad - P(S \cap A) + P(M \cap S \cap A)). \\
&= 1 - (0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}2 - 0{,}15 - 0{,}12 + 0{,}1) \\
&= 0{,}43
\end{aligned}
$$

Jawaban yang benar adalah C.

BAB DUA
KONDISIONAL PROBABILITAS

2.1.Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa dapat:

a. Memahami konsep kondisional probabilitas
b. Menggunakan konsep kondisional probabilitas untuk menyelesaikan masalah

2.2.Rangkuman Materi

a. Dalam kondisional probabilitas dibahas hubungan antara dua atau lebih kejadian. Dengan kata lain, jika suatu kejadian terjadi, maka bagaimana efek kejadian tersebut mempengaruhi probabilitas kejadian lain

b. Probabilitas kejadian A dengan syarat kejadian B dirumuskan $P((A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, dimana $P(B) > 0$

c. Karena $P((A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, dimana $P(B) > 0$, menunjukkan bahwa ruang probabilitas baru dari $P(A|B)$ adalah B sehingga kejadian A merupakan bagian dari kejadian B

d. $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ adalah aturan perkalian

e. Karena $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$ dan $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$ serta $P(B \cap A^C) = P(B|A^C)P(A^C)$, maka $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)$

f. Jika $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ adalah partisi dari ruang probabilitas S, maka

$P((A_j|B) = \frac{P(B\cap A_j)}{P(B)} = \frac{P(B\cap A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$, untuk $j = 1, 2, \dots, n$.

Misal untuk $n = 3$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)}$$

$$= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)}$$

$\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$ disebut Aturan Total Probabilitas dan $P((A_j|B)$ disebut pasterior probabilitas.

g. $P(A^C|B) = 1 - P(A|B)$

h. $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$

i. $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

j. Jika $A \subset B$sehingga $A \cap B = A$, maka $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$ dan $P(B|A) = 1$

k. Jika $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, maka

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

l. JikaA dan B kejadian *indenpendent* maka A^C dan B *independent*, A dan B^C *independent*, begitu juga A^C dan B^C *independent*

m. Karena $P(\emptyset) = P(\emptyset \cap A) = 0 = P(\emptyset)P(A)$, ini menunjukkan bahwa $\emptyset$ *independent* untuk sebarang kejadian A

n. Jika A dan B *independent*, maka $P((A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$ dan $P((B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$

2.3.Soal dan Penyelesaiannya

1. Suatu kotak berisi 20 apel dan 5 jeruk. Jika diambil 2 buah secara acak berturut-turut maka berapakah probabilitas bahwa kedua buah yang terambil adalah apel

   <u>Penyelesaian:</u>

   Ditentukan A = adalah kejadian buah yang terambil pertama adalah apel dan

   B = adalah kejadian buah yang terambil kedua adalah apel.

   Diketahui: $P(A) = \frac{20}{25}$ dan $P(B|A) = \frac{19}{24}$

   Ditanya: $P(A \cap B)$

   Jawab: Karena $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, maka $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{19}{24} . \frac{20}{25} = 0{,}633$

   Jadi probabilitas kedua buah yang terambil adalah apel adalah 0,633

2. Suatu populasi terdapat banyak laki-laki dan perempuan sama. Dalam populasi tersebut 10% laki-laki dan 5% dari wanita adalah buta warna. Seorang buta warna dipilih secara random, berapa probabilitas orang laki-laki yang terpilih

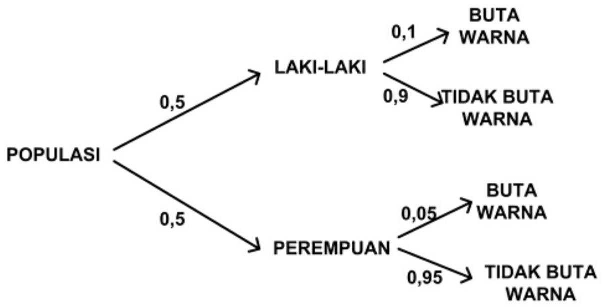
   <u>Penyelesaian:</u>

   Ditentukan M = kejadian terpilihnya laki-laki, M^C = kejadian terpilihnya perempuan, BW = kejadian buta warna

   Diketahui: $P(M) = P(M^C) = 0{,}50; P(BW|M) = 0{,}10; P(BW|M^C) = 0{,}05$

   Ditanya: $P(M|BW)$

   Jawab:



Karena $P(M|BW) = \frac{P(BW|M)P(M)}{P(BW|M)P(M)+P\left(BW\middle|M^C\right)P(M^C)}$

$$= \frac{(0,10)(0,50)}{(0,10)(0,50)+(0,05)(0,50)}$$

$$= \frac{0,05}{0,05+0,025}$$

$$= \frac{0,05}{0,075} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3} = 0,67$$

Jadi probabilitas laki-laki buta warna yang terpilih adalah 0,67

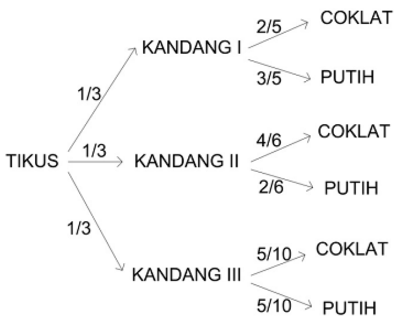
3. Disuatu laboratorium terdapat 3 kandang tikus. Kandang I terdapat 2 tikus coklat dan 2 tikus putih, kandang II terdapat empat tikus coklat dan 2 tikus putih dan kandang III terdapat 5 tikus coklat dan 5 tikus putih. Sebuah kandang dipilih secara random dan seekor tikus dipilih secara random dari kandang tersebut. Jika tikus yang terpilih berwarna putih, berapa probabilitas tikus yang terpilih berasal dari kandang I

Penyelesaian:

Ditentukan I = kejadian teambilnya tikus dari kandang 1, II = kejadian terambilnya tikus dari kandang 2, III = terambilnya tikus dari kandang 3, P = kejadian terambilnya tikus warna putih dan C = kejadian terambilnya tikus warna coklat.

Diketahui:

Diagram pohon dari masalah dalam soal digambarkan sebagai berikut



Ditanya: $P(I|P)$

Jawab:

Karena $P(I|W) = \frac{P(W|I)P(I)}{P(W|I)P(I)+P(W|II)P(II)+P(W|III)P(III)}$. Berdasarkan diagram pohon diperoleh bahwa

$$P(I|W) = \frac{P(W|I)P(I)}{P(W|I)P(I)+P(W|II)P(II)+P(W|III)P(III)}$$

$$= \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{18}{43}$$

Jadi probabilitas tikus putih yang terpilih berasal dari kandang I adalah $\frac{18}{43}$

4. Tunjukkan bahwa $P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C)P(B|C)$

Penyelesaian:

$$P(A|B \cap C)P(B|C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}\frac{P(B\cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}$$

$$= P(A \cap B|C)$$

5. Buktikan jika $P(B|A) > P(B)$, maka $P(A|B) > P(A)$

Penyelesaian:

Karena $P(B|A) > P(B)$, maka $\frac{P(B\cap A)}{P(A)} > P(B)$, sehingga diperoleh

$P(B \cap A) > P(A)P(B)$.

Perhatikan bahwa $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\cap A)}{P(B)} > \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$

6. Jika diketahui A dan B adakah suatu kejadian, buktikan bahwa:

a. $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$

b. $P(A \cup B) = 1 - P(A^C \cap B^C)$

Penyelesaian:

a. Karena $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$, dan $(A \cap B)$ serta $(A \cap B^C)$ adalah kejadian saling lepas, maka

P$(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$, sehingga $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$

b. Karena $P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B)^C$ dan karena $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, maka $P(A \cup B) = 1 - P(A^C \cap B^C)$

7. Dalam suatu penelitian lalat buah, terdapat dua jenis mutasi yaitu mutasi sayap dan mutasi mata. Mutasi sayap terdapat 25% populasi, 15% mutasi mata dan 10% mutasi keduanya. Jika seekor lalat dipilih secara acak, maka tentukan:
   a. Jika lalat tersebut mempunyai mutasi sayap, berapa probabilitas juga mempunyai mutasi mata
   b. Jika lalat tersebut mempunyai mutasi mata, berapa probabilitas juga mempunyai mutasi sayap
   c. Berapa probabilitas bahwa lalat tersebut paling sedikit mempunyai satu mutas

   <u>Penyelesaian:</u>

   Ditentukan S = kejadian lalat mengalami mutasi sayap dan M = kejadian lalat mengalami mutasi mata

   Diketahui: $P(S) = 0{,}25; P(M) = 0{,}15; P(S \cap M) = 0{,}10$

   Ditanya:

   a. $P(M|S)$
   b. $P(S|M)$
   c. $P(S \cup M)$

   Jawab:

   a. $P(M|S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = \frac{2}{5}$
   b. $P(S|M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}10}{0{,}15} = \frac{2}{3}$
   c. $P(S \cup M) = P(S) + P(M) - P(S \cap M) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}10 = 0{,}30$

8. Misal A dan B kejadian sehingga P(A) = 0,8 dan P(B) = 0,7
   a. Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}1$? Berikan alasannya
   b. Berapakah nilai terkecil dari $P(A \cap B)$
   c. Apakah mungkin nilai $P(A \cap B) = 0{,}7777$, berikan alasannya
   d. Berapakah nilai terbesar dari $P(A \cap B)$

   <u>Penyelesaian:</u>

   Diketahui: P(A) = 0,8 dan P(B) = 0,7

   Ditanya: $P(A \cap B)$

   Jawab:

   a. Karena $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1{,}5 - P(A \cap B)$,
   karena $P(A \cup B) \leq 1$, maka $P(A \cap B) = 0{,}1$ tidak mungkin karena $P(A \cup B) = 1{,}4$

b. Karena $P(A \cup B) \leq 1$ dan $P(A \cup B) = 1{,}5 - P(A \cap B)$, maka nilai terkecil $P(A \cap B) = 0{,}50$

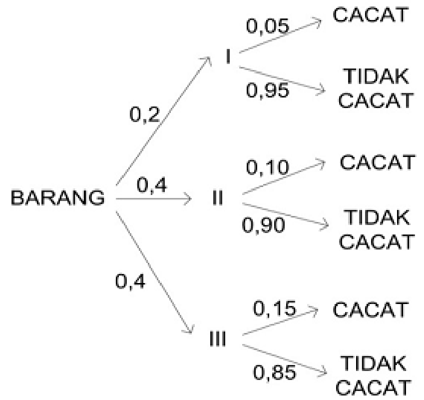
c. Karena $A \cap B \subset A$ dan juga $A \cap B \subset B$, maka $P(A \cap B) \leq P(A) = 0{,}8$ dan juga $P(A \cap B) \leq P(B) = 0{,}7$ maka $P(A \cap B) \leq 0{,}7$, sehingga tidak mungkin $P(A \cap B) = 0{,}7777$

d. Karena $P(A \cap B) \leq 0{,}7$, maka nilai terbesar $P(A \cap B) = 0{,}7$

9. Tiga mesin I, II dan III menghasilkan produksi 20%, 40%, 40% dari jumlah seluruh produksi. Dari masing-masing produk terdapat 5%, 10% dan 15% produk yang cacat. Satu produk diambil secara acak, dan diperiksa ternyata cacat, tentukan probabilitas produk tersebut berasal dari mesin I

Penyelesaian:

Diketahui:



Ditentukan C = kejadian produk cacat terambil, I = kejadian produk terambil dari mesin 1, II = kejadian produk terambil dari mesin 2 dan III = kejadian produk terambil dari mesin III

Ditanya: $P(I|C)$

Jawab:

$$P(I|C) = \frac{P(C|I)P(I)}{P(C|I)P(I)+P(C|II)P(II)+P(C|III)P(III)}.$$

$$= \frac{(0{,}05)(0{,}2)}{(0{,}05)(0{,}2)+(0{,}10)(0{,}4)+(0{,}15)(0{,}4)}$$

$$= \frac{1}{11}$$

10. Misalkan sebuah dadu dilempar, maka ruang probabilitasnya adalah

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ditentukan A adalah kejadian muncul angka genap, B adalah kejadian muncul angka ≤ 3, C adalah kejadian muncul angka 1 atau 2 dan D adalah kejadian muncul angka selain 1 dan 6, tentukan $P(B|A)$, $P(B|C)$ dan $P(A|C)$

a. $\frac{1}{3}$, 1 dan $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ dan $\frac{1}{3}$

c. $1, \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ dan $\frac{1}{2}$

e. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2}$

Penyelesaian:

Diketahui: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2\}$, dan $D = \{2, 3, 4, 5\}$

Ditanya: $P(B|A)$, $P(B|C)$ dan $P(A|C)$

Jawab: Karena $A \cap B = \{2\}$, maka $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(2)}{P(2,4,6)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

Karena $B \cap C = \{1,2\}$, maka $P(B|C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{P(1,2)}{P(1,2)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{6}} = 1$

Karena $A \cap C = \{2\}$, maka $P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$

Jadi jawaban yang benar adalah A

11. Jika $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{5}{12}$ dan $P(A|B) + P(B|A) = \frac{7}{10}$. Tentukan $P(A \cap B)$

a. $\frac{1}{12}$

b. $\frac{2}{12}$

c. $\frac{3}{12}$

d. $\frac{4}{12}$

e. $\frac{7}{12}$

Penyelesaian:

Diketahui: $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{5}{12}$ dan $P(A|B) + P(B|A) = \frac{7}{10}$

Ditanya: $P(A \cap B)$

Jawab: Karena $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{6}}$, maka $P(A|B) = 6P(A \cap B)$

Karena $P(A|B) = 6P(A \cap B)$, maka $P(B|A) = \frac{12}{5} P(B \cap A)$

Karena $P(A|B) = 6P(A \cap B)$ dan $P(B|A) = \frac{12}{5} P(B \cap A)$, maka

$P(A|B) + P(B|A) = 6P(A \cap B) + \frac{12}{5} P(B \cap A)$. Karena $A \cap B = B \cap A$, sehingga $P(A \cap B) = P(B \cap A)$, maka

$P(A|B) + P(B|A) = 6P(A \cap B) + \frac{12}{5} P(B \cap A) = \left(6 + \frac{12}{5}\right) P(A \cap B) = \frac{7}{10}$.

Karena $\left(6 + \frac{12}{5}\right) P(A \cap B) = \frac{7}{10}$, maka $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$.

Jadi jawaban yang benar adalah A.

12. Kantong I berisi 2 bola putih dan 2 bola hitam serta kantong II berisi 3 bola putih dan 2 bola hitam. Kantong dipilih secara random, dan sebuah bola diambil random dari kantong tersebut. Tentukan probabilitas yang terambil bola putih!

a. $\frac{11}{20}$

b. $\frac{13}{20}$

c. $\frac{14}{20}$

d. $\frac{15}{20}$

e. $\frac{17}{20}$

Penyelesaian:

Ditentukan A adalah kejadian kantong I yang terpilih, A^C adalah kejadian kantong II yang terpilih, B adalah kejadian bola putih yang terpilih

Dikatahui: $P(A) = P(A^C) = \frac{1}{2}$, peluang terambil bola putih dari kantong I dinotasikan $P(B|A) = \frac{1}{2}$ (terambilnya 2 bola putih dari 4 bola dari kantong I) dan peluang terambilnya bola putih dari kantong II dinotasikan $P(B|A^C) = \frac{3}{5}$ (terambilnya 3 bola putih dari 5 bola yang tersedia di kantong II)

Ditanya: $P(B)$

Jawab:

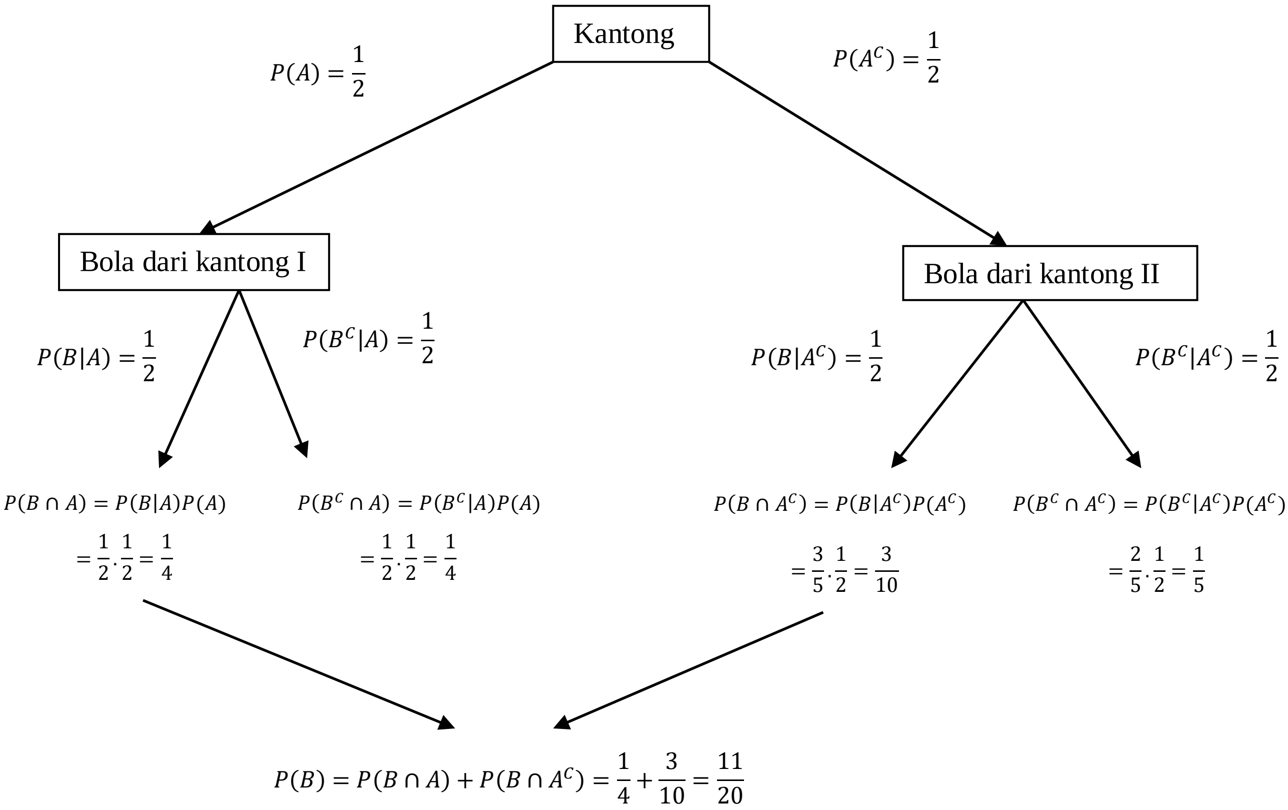
Karena $P(A) = \frac{1}{2}$ dan $P(B|A) = \frac{1}{2}$, maka $P(B \cap A) = \frac{1}{2}\ P(A) = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Karena $P(A^C) = \frac{1}{2}$ dan $P(B|A^C) = \frac{1}{2}$, maka $P(B \cap A^C) = \frac{1}{2}\ P(A^C) = \frac{3}{5} . \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

Karena $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C), P(B \cap A) = \frac{1}{4}$ dan $P(B \cap A^C) = \frac{3}{10}$, maka

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C) = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{11}{20}$. Jadi jawaban yang benar adalah A

Atau dapat dikerjakan dengan cara diagram pohon seperti berikut



13. Jika A dan B kejadian independent. Tentukan probabilitas tepat satu kejadian A dan B terjadi dalam bentuk $P(A)$ dan $P(B)$
    a. $P(A) + P(B) - P(A)P(B)$
    b. $P(A) + P(B) - 2P(A)P(B)$
    c. $P(A) + P(B) + P(A)P(B)$
    d. $P(A) + P(B) + 2P(A)P(B)$
    e. $P(A) + P(B)$

    <u>Penyelesaian:</u>

    Diketahui: A dan B kejadian independent

    Ditanya: $P((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B))$

    Jawab: Karena $(A \cap B^C)$ dan $(A^C \cap B)$ mutually exclusive, maka

    $P\big((A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)\big) = P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B)$.

Karena A dan B *independent*, maka A^C dan B *independent*, A dan B^C juga *independent*, sehingga

$$P\left((A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)\right) = P(A\cap B^C) + P(A^C\cap B) = P(A)P(B^C) + P(A^C)P(B)$$
$$= P(A)\left(1-P(B)\right) + \left(1-P(A)\right)P(B)$$
$$= P(A) + P(B) - 2P(A)P(B)$$

Jadi jawaban yang benar adalah B

14. Jika A, B, C dan D adalah suatu kejadian sedemikian sehingga B = A^C, $C\cap D=\emptyset$ dan $P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{3}{4}, P(C|A)=\frac{1}{2}, P(C|B)=\frac{3}{4}, P(D|A)=\frac{1}{4}, P(D|B)=\frac{1}{8}$. Tentukan $P(C\cup D)$

    a. $\frac{5}{32}$
    b. $\frac{1}{4}$
    c. $\frac{27}{32}$
    d. $\frac{3}{4}$
    e. 1

    <u>Penyelesaian:</u>

    Diketahui: B = A^C, $C\cap D=\emptyset$ dan $P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{3}{4}, P(C|A)=\frac{1}{2}, P(C|B)=\frac{3}{4}, P(D|A)=\frac{1}{4}, P(D|B)=\frac{1}{8}$

    Ditanya: $P(C\cup D)$

    Jawab:

    Karena $C\cap D=\emptyset$, maka $P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)=P(C)+P(D)$

    Karena B = A^C, $P(C|A=B^C)=\frac{1}{2}, P(C|B)=\frac{3}{4}$, sehingga

    $$P(C)=P(C|B^C)P(B^C)+P(C|B)P(B)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}.\frac{3}{4}=\frac{11}{16}$$

    Karena B = A^C, $P(D|A)=\frac{1}{4}, P(D|B=A^C)=\frac{1}{8}$, sehingga

    $P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|A^C)P(A^C)=\frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{32}$,

    Sehingga $P(C\cup D)=P(C)+P(D)=\frac{11}{16}+\frac{5}{32}=\frac{27}{32}$

    Jadi jawaban yang benar adalah C.

15. Jika $P(A)=0{,}5$ dan $P(A\cup B)=0{,}7$. Aktuaris 1 mengasumsikan bahwa A dan B *independent* dan mementukan P(B) berdasarkan asumsi tersebut. Aktuaris 2

mengasumsikan A dan B adalah *mutually exclusive* dan menentukan P(B) berdasarkan asumsi tersebut. Tentukan beda P(B) dari dua aktuaris tersebut

a. 0
b. 0,05
c. 0,10
d. 0,15
e. 0,20

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui: $P(A) = 0{,}5$ dan $P(A \cup B) = 0{,}7$, aktuaris 1 mengasumsikan A dan B kejadian *independent* serta aktuaris 2 mengasumsikan A dan B *mutually exclusive*.

Ditanya: selisi P(B) yang diperoleh dua aktuaris

Jawab:

Karena $P(A) = 0{,}5$ dan $P(A \cup B) = 0{,}7$, maka

Aktuaris 1 mengasumsikan A dan B saling *independent*, dengan $P(A) = 0{,}5$ dan $P(A \cup B) = 0{,}7$, diperoleh $P(B) = P(A \cup B) - P(A) + 0{,}5P(B)$, sehingga diperoleh

$$P(B) = \frac{0{,}7 - 0{,}5}{0{,}5} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = \frac{2}{5} = 0{,}40$$

Aktuaris 2 mengasumsikan A dan B *mutually exclusive*, dengan $P(A) = 0{,}5$ dan $P(A \cup B) = 0{,}7$, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, sehingga

$0{,}7 = 0{,}5 + P(B)$, jika hanya jika $P(B) = 0{,}2$. Selisih P(B) dari aktuaris 1 dan aktuaris 2 adalah $0{,}40 - 0{,}20 = 0{,}20$. Jadi jawaban yang benar adalah E

16. Dua kantong berisi 5 bola hitam dan 5 bola putih. Sebuah bola dipilih secara random dari kantong I dan diletakkan dikantong II. Sebuah bola selanjutnya juga diambil dari kantong II dan diletakkan di kantong I. Tentukan probabilitas bahwa kantong I masih mempunyai 5 bola hitam dan 5 bola putih

a. $\frac{2}{3}$
b. $\frac{3}{5}$
c. $\frac{6}{11}$
d. $\frac{1}{2}$
e. $\frac{6}{13}$

<u>Penyelesaian:</u>

17. Suatu perusahaan asuransi memperkirakan bahwa 40% pemegang polis yang hanya punya auto polis akan memperbarui tahun depan dan 60% pemegang polis yang hanya mempunyai polis kepemilikan rumah akan memperbarui tahun depan. Perusahaan memperkirakan bahwa 80% pemegang polis yang mempunyai auto polis dan polis kepemilikan rumah akan memperbarui minimal satu polis tahun depan. Perusahaan mendata bahwa 65% pemegang polis mempunyai auto polis, 50% pemegang polis mempunya polis kepemilikan rumah dan 15% memiliki auto polis dan polis kepemilikan rumah. Dengan menggunakan data dan asumsi perusahaan, tentukan persentase pemegang polis akan memperbarui paling sedikit satu polis tahun depan!
    a. 20
    b. 29
    c. 41
    d. 53
    e. 70

    Penyelesaian:

    Ditentukan A = kejadian pemegang polis mempunyai auto polis, H = kejadian pemegang polis mempunyai polis kepemilikan rumah dan R = kejadian pemegang polis akan memperbarui polis

    Diketahui: $P(A) = 0{,}65, P(H) = 0{,}50, P(A \cap H) = 0{,}15, P(R|A \cap H^C) = 0{,}40; P(R|A^C \cap H) = 0{,}60$ dan $P(R|A \cap H) = 0{,}80$

    Ditanya: $P(R)$

    Jawab: $\mathrm{P(R)} = \mathrm{P}\left(\mathrm{R} \cap (\mathrm{A} \cap \mathrm{H^C})\right) + \mathrm{P(R} \cap (\mathrm{A^C} \cap \mathrm{H}) + \mathrm{P(R} \cap (\mathrm{A} \cap \mathrm{H}))$

    Karena $P(A) = 0{,}65$ dan $P(A \cap H) = 0{,}15$, maka

    $P(A \cap H^C) = P(A) - P(A \cap H) = 0{,}65 - 0{,}15 = 0{,}50$

    Karena $P(H) = 0{,}50, P(A \cap H) = 0{,}15$, maka

    $P(A^C \cap H) = P(H) - P(A \cap H) = 0{,}50 - 0{,}15 = 0{,}35$

    Karena , $P(R|A \cap H^C) = 0{,}40$, dan $P(A \cap H^C) = 0{,}50$ maka

    $\mathrm{P}\left(\mathrm{R} \cap (\mathrm{A} \cap \mathrm{H^C})\right) = P(R|A \cap H^C)P(A \cap H^C) = (0{,}40)(0{,}50) = 0{,}2$

    Karena, $P(R|A^C \cap H) = 0{,}60$, dan $P(A^C \cap H) = 0{,}35$, maka

    $\mathrm{P(R} \cap (\mathrm{A^C} \cap \mathrm{H}) = P(R|A^C \cap H)P(A^C \cap H) = (0{,}60)(0{,}35) = 0{,}21$,

    Karena $P(R|A \cap H) = 0{,}80$, dan $P(A \cap H) = 0{,}15$, maka

$\mathrm{P}\big(\mathrm{R} \cap (\mathrm{A} \cap \mathrm{H})\big) = P(R|A \cap H)P(A \cap H) = (0{,}80)(0{,}15) = 0{,}12,$

Sehingga

$\mathrm{P(R)} = \mathrm{P}\left(\mathrm{R} \cap (\mathrm{A} \cap \mathrm{H^C})\right) + \mathrm{P(R} \cap (\mathrm{A^C} \cap \mathrm{H}) + \mathrm{P}\big(\mathrm{R} \cap (\mathrm{A} \cap \mathrm{H})\big) = 0{,}20 + 0{,}21 + 0{,}12 = 0{,}53$. Jadi jawaban yang benar adalah D.

18. Suatu perusahaan asuransi melakukan riset pada nasabahnya dan mendapatkan informasi sebagai berikut:
    a. Semua nasabah asuransi paling sedikit mengasuransikan satu mobil
    b. 70% nasabah mengasuransikan mobil lebih dari satu
    c. 20% nasabah mengasuransikan mobil sport
    d. Dari nasabah yang mengasuransikan lebih dari satu mobil, 15% mengasuransikan mobil sport

    Tentukan probabilitas terpilihnya secara random nasabah yang mengasuransikna tepat satu mobil dan mobil tersebut bukan mobil sport
    a. 0,13
    b. 0,21
    c. 0,24
    d. 0,25
    e. 0,30

    Penyelesaian:

    Ditentukan M = kejadian nasabah mengasuransikan lebih dari satu mobil, dan C = kejadian nasabah mengasuransikan mobil sport.

    Diketahui: $P(M) = 0{,}70$; $P(C) = 0{,}20$ dan $P(C|M) = 0{,}15$

    Ditanya: $P(M^C \cap C^C)$

    Jawab: Karena $M^C \cap C^C = (M \cup C)^C$, maka

    $P(M^C \cap C^C) = P(M \cup C)^C = 1 - P(M \cup C)$

    Karena $P(C|M) = 0{,}15$ dan $P(M) = 0{,}70$, maka $P(M \cap C) = P(C|M)P(M) = (0{,}15)(0{,}70) = 0{,}105$

    Karena $P(M^C \cap C^C) = 1 - P(M \cup C)$ dan $P(M \cap C) = 0{,}105$, maka

    $P(M^C \cap C^C) = 1 - P(M) - P(C) + P(M \cap C) = 1 - 0{,}7 - 0{,}2 + 0{,}105 = 0{,}205$.

    Jadi jawaban yang benar adalah B

19. Hasil studi kesehatan dilakuakn terhadap sekelompok orang selama 5 tahun. Pada permulaan studi 20% orang diklasifikasikan sebagai prokok berat, 30% perokok ringan dan 50% bukan perokok. Hasil studi menunjukkan bahwa resiko kematian perokok ringan dua kali dari bukan perokok dalam kurun waktu lima, tetapi hanya separuh perokok berat. Secara random terpilih partisipan mati dalam kurun waktu lima tahun. Tentukan probabilitas partisipan tersebut adalah perokok berat
    a. 0,20
    b. 0,25
    c. 0,35
    d. 0,42
    e. 0,57

    Penyelesaian:

    Ditentukan B = kejadian partisipan adalah perokok berat, R = kejadian partisipan adalah perokok ringan dan N = kejadian partisipan bukan perokok dan D = kejadian partisipan mati

    Diketahui: $P(B) = 0{,}20, P(R) = 0{,}30$ dan $P(N) = 0{,}5$, $P(D|R) = 2P(D|N)$, dan , $P(D|R) = \frac{1}{2}P(D|B)$

    Ditanya: $P(B|D)$

    Jawab: Ditentukan $P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D|R)P(R)+P(D|N)P(N)+P(D|B)P(B)}$

    Karena $P(D|R) = 2P(D|N)$, maka $P(D|N) = \frac{1}{2}\ P(D|R)$,

    Karena $P(D|R) = \frac{1}{2}P(D|B)$, maka $P(D|B) = 2\ P(D|R)$,

    Karena $P(B) = 0{,}20, P(R) = 0{,}30$ dan $P(N) = 0{,}5, P(D|N) = \frac{1}{2}\ P(D|R)$, dan $P(D|B) = 2\ P(D|R)$, maka

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D|R)P(R) + P(D|N)P(N) + P(D|B)P(B)}$$

$$= \frac{2\ P(D|R)(0{,}2)}{P(D|R)(0{,}3) + \frac{1}{2}\ P(D|R)(0{,}5) + 2\ P(D|R)(0{,}2)}$$

$$= \frac{0{,}4P(D|R)}{(0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}4)P(D|R)}$$

$$= \frac{0{,}4P(D|R)}{0{,}95P(D|R)} = 0{,}4211$$

Jadi jawaban yang benar adalah D

20. Suatu perusahaan asuransi mengasuransikan semua sopirnya. Seorang aktuaris memperoleh data sebagai berikut:

Umur Sopir	Probabilitas Kecelakaan	Porsi Perusahaan Mengasuransikan Sopirnya
16 – 20	0,06	0,08
21 – 30	0,03	0,15
31 – 65	0,02	0,49
66 - 99	0,04	0,28

Jika dipilih sopir yang mengalami kecelakaan secara random. Tentukan probabilitas bahwa sopir tersebut berumur 16 – 20 tahun

a. 0,13
b. 0,16
c. 0,19
d. 0,23
e. 0,40

Penyelesaian:

Ditentukan K = kejadian sopir mengalami kecelakaan, A = kejadian sopir berumur 16 -20, B = kejadian sopir berumur 21 – 30, C = kejadian sopir berumur 31 – 65 dan D = kejadian sopir berumur 66 – 99,

Diketahui: P(A) = 0,80; P(B) = 0,15; P(C) = 0,49; P(D) = 0,28, $P(K|A) = 0{,}06; P(K|B) = 0{,}03; P(K|C) = 0{,}02$ dan $P(K|D) = 0{,}04$

Ditanya: $P(A|K)$

Jawab: Ditentukan $P(A|K) = \frac{P(K|A)P(A)}{P(K|A)P(A)+P(K|B)P(B)+P(K|C)P(C)+P(K|D)P(D)}$, sehingga

$$P(A|K) = \frac{P(K|A)P(A)}{P(K|A)P(A) + P(K|B)P(B) + P(K|C)P(C) + P(K|D)P(D)}$$

$$= \frac{(0{,}06)(0{,}80)}{(0{,}06)(0{,}8) + (0{,}03)(0{,}15) + (0{,}02)(0{,}49) + (0{,}04)(0{,}28)}$$

$$= 0{,}1584$$

Jadi jawaban yang benar adalah B

2.4.Lembar Kerja Mahasiswa

1. Berdasarkan pasien yang masuk dalam suatu IGD, pasien digolongkan dalam kategori kritis, serius, dan stabil. Pada setahun terakhir diperoleh informasi berikut:
   a. 10% pasien yang masuk IGD adalah kritis
   b. 30% pasien yang masuk IGD adalah serius
   c. 60% pasien yang masuk IGD adalah stabil
   d. 40% pasien yang kondisinya kritis mati
   e. 10% pasien yang kondisinya serius mati
   f. 1% pasien yang kondisinya stabil mati

   Dari pasien yang sembuh, tentukan probabilitas bahwa pasien tersebut dalam kategori serius!
   a. 0,06
   b. 0,29
   c. 0,30
   d. 0,39
   e. 0,64

   Penyelesaian:

   Ditentukan U = kejadian pasien sembuh, K = kejadian pasien dalam kategori kritis, S = kejadian pasiendalam kategori serius dan T =kejadian pasien dalam kategori stabil

   Diketahui: $\mathrm{P(K)} = 0{,}10, \mathrm{P(S)} = 0{,}30; \mathrm{P(T)} = 0{,}60; \mathrm{P(U^C|K)} = 0{,}40; \mathrm{P(U^C|S)} = 0{,}10; \mathrm{P(U^C|T)} = 0{,}01$

   Ditanya: $P(S|U)$

   Jawab: Menurut Teorema *Bayes*

$$P(S|U) = \frac{P(U|S)P(S)}{P(U|S)P(S) + P(U|K)P(K) + P(U|T)P(T)}$$

   Karena $\mathrm{P(U^C|K)} = 0{,}40$, maka $P(U|K) = 1 - \mathrm{P(U^C|K)} = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$

   Karena $\mathrm{P(U^C|S)} = 0{,}10$, maka $P(U|S) = 1 - \mathrm{P(U^C|S)} = 1 - 0{,}10 = 0{,}90$

   Karena $\mathrm{P(U^C|T)} = 0{,}01$, maka $P(U|T) = 1 - \mathrm{P(U^C|T)} = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$, sehingga

$$P(S|U) = \frac{P(U|S)P(S)}{P(U|S)P(S) + P(U|K)P(K) + P(U|T)P(T)}$$

$$= \frac{(0{,}90)(0{,}30)}{(0{,}90)(0{,}30) + (0{,}60)(0{,}10) + (0{,}99)(0{,}60)}$$
$$= 0{,}2922$$

Jadi jawaban yang benar adalah B

2. Suatu perusahaan asuransi jiwa mengklasifikasikan menjadi tiga yaitu *standart*, *prefered* dan *ultraprefered*. Dari para pemegang polis, 50% *standart*, 40% *prefered* dan 10% *ultraprefered*. Probabilitas kematian bagi pemegang polis *standart* adalah 0,010, untuk pemegang polis *prefered* 0,005 dan *ultraprefered* 0,001 mati ditahun depan. Tentukan pemegang polis *ultraprefered* mati di tahun depan

   a. 0,0001
   b. 0,0010
   c. 0,0071
   d. 0,0141
   e. 0,2871

   Penyelesaian:

   Ditentukan S = kejadian pemegang polis standart, P = kejadian pemegang polis prefered, U = kejadian pemegang polis ultra prefered dan D = kejadian pemegang polis mati dalam tahun depan

   Diketahui: $P(S) = 0{,}50, P(P) = 0{,}40, P(U) = 0{,}10, P(D|S) = 0{,}010, P(D|P) = 0{,}005, P(D|U) = 0{,}001$

   Ditanya: $P(U|D)$

   Jawab: Menurut Teorema Bayes

$$P(U|D) = \frac{P(D|U)P(U)}{P(D|U)P(U) + P(D|S)P(S) + \ P(D|P)P(P)}$$
$$= \frac{(0{,}001)(0{,}10)}{(0{,}001)(0{,}10) + (0{,}010)(0{,}50) + (0{,}005)(0{,}40)} = 0{,}0141$$

   Jadi jawaban yang benar adalah D

3. Seorang aktuaris mempelajari tiga resiko kesehatan yang dinotasikan A, B dan C yang terjadi pada populasi wanita. Probabilitas tepat satu resiko terjadi adalah 0,10 dan probabilitas tepat dua resiko terjadi adalah 0,12. Probabilitas seorang wanita memiliki tiga resiko diantara wanita yang memiliki resiko A dan B adalah $\frac{1}{3}$. Tentukan

probabilitas seorang wanita tidak memiliki tiga resiko diantara wanita yang tidak memiliki resiko A

a. 0,280
b. 0,311
c. 0,467
d. 0,484
e. 0,700

<u>Penyelesaian:</u>

Ditentukan A = kejadian seorang wanita memiliki resiko A, B = kejadian seorang wanita memilikiresiko B dan C = kejadian seorang wanita memiliki resiko C

Diketahui:

$P(A \cap B^C \cap C^C) = 0{,}10; P(A \cap B \cap C^C) = 0{,}12; P(A \cap B \cap C|A \cap B) = \frac{1}{3}$

Ditanya: $P((A \cup B \cup C)^C|A^C)$

Jawab:

Karena $P(A \cap B \cap C|A \cap B) = \frac{1}{3}$ dan $P(A \cap B \cap C^C) = P(A \cap B) = 0{,}12$ dan dengan memisalkan $P(A \cap B \cap C) = x$ maka

$$\frac{1}{3} = P(A \cap B \cap C|A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{x}{x + 0{,}12}$$

sehingga diperoleh $P(A \cap B \cap C) = 0{,}06$.

$$P((A \cup B \cup C)^C|A^C) = \frac{P((A \cup B \cup C)^C \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{P(A \cup B \cup C)^C}{P(A^C)}$$

Karena $P(A \cup B \cup C)^C = 1 - P(A \cup B \cup C)$ dan $P(A^C) = 1 - P(A)$, maka

$$P((A \cup B \cup C)^C|A^C) = \frac{1 - P(A \cup B \cup C)}{1 - P(A)}$$

Karena $(A \cup B \cup C) = (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$ adalah *mutually exclusive* maka

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cap B^C \cap C^C) + P(A^C \cap B \cap C^C) + P(A^C \cap B^C \cap C) + P(A \cap B \cap C^C) + P(A \cap B^C \cap C) + P(A^C \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$,

Karena $P(A \cap B^C \cap C^C) = P(A^C \cap B \cap C^C) = P(A^C \cap B^C \cap C) = 0{,}10$ dan $P(A \cap B \cap C^C) = P(A \cap B^C \cap C) = P(A^C \cap B \cap C) = 0{,}12$, maka $P(A \cup B \cup C) = 3(0{,}10) + 3(0{,}12) + 0{,}06 = 0{,}72$.

Sedangkan karena

$A = (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$ adalah *mutually exclusive*, maka

$P(A) = P(A \cap B^C \cap C^C) + 2P(A \cap B \cap C^C) + P(A \cap B \cap C)$, maka

$P(A) = 0{,}10 + 2(0{,}12) + 0{,}06 = 0{,}38$.

Karena $P(A \cup B \cup C) = 0{,}72$ dan $P(A) = 0{,}38$ maka

$P((A \cup B \cup C)^C | A^C) = \frac{1-P(A\cup B\cup C)}{1-P(A)} = \frac{1-0{,}72}{1-0{,}38} = \frac{0{,}28}{0{,}60} = 0{,}4667$. Jadi jawaban yang benar adalah C

4. Seorang peneliti asuransi memperoleh data dari 937 laki-laki yang mati pada tahun 1999, dan menemukan bahwa 210 laki-laki meninggal karena penyakit hati. Sedangkan 312 dari 937 laki-laki sedikitnya mempunyai satu orang tua yang mengidap penyakit hati. Dari 312 laki-laki, sebanyak 102 laki-laki meninggal karena penyakit hati. Tentukan probabilitas terpilihnya secara random seorang laki-laki meninggal karena penyakit hati, dimana kedua orangtua mereka juga mengidap penyakit hati!

   a. 0,115
   b. 0,173
   c. 0,224
   d. 0,327
   e. 0,514

   Penyelesaian:

   Ditentukan H = adalah kejadian kematian disebabkan penyakit hati dan E = adalah kejadian kedua orang tua mengidap penyakit hati

   Diketahui: n(Laki-laki meninggal tahun 1999) = 937, n(laki-laki yang meninggal tahun 1999 karena penyakit hati) = 210, n(laki-laki yang meninggal dengan sedikitnya satu orang tua mengidap penyakit hati) = 312, n(laki-laki dengan sedikitnya satu orang tuanya mengidap penyakti hati, meninggal karena penyakit hati) = 102

   Ditanya: $P(H|E)$

   Jawab:

   Karena $P(H|E) = \frac{P(H\cap E)}{P(E)}$, ditentukan terlebih dahulu $P(H \cap E)$ dan $P(E)$.

$$P(H \cap E) = \frac{n(H \cap E)}{n(laki-laki\ meninggal\ dalam\ tahun\ 1999)}$$

Karena $n(H \cap E) = 210 - 102 = 108$, sehingga $P(H \cap E) = \frac{108}{937}$

Karena

$P(E^C) = \frac{n(\text{pria meninggal yang sedikitnya satu orang tua mengidap penyakit hati})}{937} = \frac{312}{937}$

maka $P(E) = 1 - P(E^C) = 1 - \left(\frac{312}{937}\right) = \frac{625}{937}$, sehingga

$$P(H|E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{108}{937}}{\frac{625}{937}} = \frac{108}{625} = 0{,}173$$

Jadi jawaban yang benar adalah B

5. Studi dari kecelakaan mobil menghasilkan data berikut:

Tahun	Proporsi Sepeda Motor	Probabilitas Kecelakaan
1997	0,16	0.05
1998	0,18	0,02
1999	0,20	0,03
Lainnya	0,46	0,04

Dari tahun model tahun 1997, 1998 dan 1999 sepeda motor mengalami kecelakaan. Tentukan bahwa yang mengalami kecelakaan adalah sepeda model 1997

a. 0,22
b. 0,30
c. 0,33
d. 0,45
e. 0,50

Penyelesaian:

Ditentukan K = kejadian sepeda motor mengalami kecelakaan, A = kejadian sepeda motor model tahun 1997, B = kejadian sepeda motor model tahun 1998, C = kejadian sepeda motor model tahun 1999 dan D = kejadian sepeda motor model lain

Diketahui: $P(A) = 0{,}16, P(B) = 0{,}18, P(C) = 0{,}20, P(D) = 0{,}46; P(K|A) = 0{,}05; P(K|B) = 0{,}20; P(K|C) = 0{,}03; P(K|D) = 0{,}04$

Ditanya: $P(A|K \cap (A \cup B \cup C))$

Jawab:

Karena $P(A|K\cap(A\cup B\cup C))=\frac{P(A\cap(K\cap(A\cup B\cup C))}{P(K\cap(A\cup B\cup C)}=\frac{P((A\cap K)\cap(A\cup B\cup C))}{P(K\cap A)\cup(K\cap B)\cup(K\cap C))}$

Karena $A\cup B\cup C$ *mutually exclusive*, maka $(A\cap K)\cap(A\cup B\cup C)=A\cap K$

Sehingga

$P(A|K\cap(A\cup B\cup C))=\frac{P((A\cap K)}{P(K\cap A)\cup(K\cap B)\cup(K\cap C))}=\frac{P((A\cap K)}{P(K\cap A)+(K\cap B)+(K\cap C))}$.

$$P(A|K\cap(A\cup B\cup C))=\frac{P(K|A)P(A)}{P(K|A)P(A)+P(K|B)P(B)+P(K|C)P(C)}$$

$$=\frac{(0{,}05)(0{,}16)}{(0{,}05)(0{,}16)+(0{,}02)(0{,}18)+(0{,}03)(0{,}20)}$$

$$=\frac{0{,}008}{0{,}0176}=0{,}4545$$

Jadi jawaban yang benar adalah D

6. Probabilitas terpilihnya seorang pria memiliki masalah pernapasan adalah 0,25. Probabilitas seseorang yang memiliki masalah pernapasan merupakan perokok dua kali dari probabilitas seseorang yang tidak memiliki masalah pernapasan merupakan perokok. Tentukan probabilitas dari perokok yang mengalami masalah pernapasan!

   a. $\frac{1}{4}$
   b. $\frac{1}{3}$
   c. $\frac{2}{5}$
   d. $\frac{1}{2}$
   e. $\frac{2}{3}$

   Penyelesaian:

   Ditentukan C = kejadian seorang pria mengalami masalah pernapasan dan

   S = kejadian seorang pria adalah perokok

   Diketahui: $P(C)=0{,}25; P(S|C)=2P(S|C^C)$

   Ditanya: $P(C|S)$

   Jawab:

   Menurut Teorema Bayes $P(C|S)=\frac{P(S|C)P(C)}{P(S|C)P(C)+P(S|C^C)P(C^C)}$

   Karena $P(C)=0{,}25; P(S|C)=2P(S|C^C)$, maka

$$P(C|S)=\frac{P(S|C)P(C)}{P(S|C)P(C)+P(S|C^C)P(C^C)}=\frac{2P(S|C^C)P(C)}{2P(S|C^C)P(C)+P(S|C^C)P(C^C)}$$

Karena $P(C) = 0{,}25$, maka $P(C^C) = 1 - P(c) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$, maka

$$P(C|S) = \frac{2P(S|C^C)P(C)}{2P(S|C^C)P(C) + P(S|C^C)P(C^C)}$$

$$= \frac{2P(C)}{2P(C) + P(C^C)}$$

$$= \frac{2(0{,}25)}{2(0{,}25) + 0{,}75} = \frac{2}{5}$$

Jadi jawaban yang benar adalah C.

7. Sepuluh persen dari pemegang polis suatu perusahaan asuransi adalah perokok. Sisanya adalah bukan perokok. Probabilitas bukan perokok yang meninggal adalah 0,01. Probabilitas perokok meninggal pada tahun tersebut adalah 0,05. Dari seorang pemegang polis yang meninggal, tentukan probabiltas pemegang polis yang meninggal tersebut adalah perokok

   a. 0,05
   b. 0,20
   c. 0,36
   d. 0,56
   e. 0,90

   Penyelesaian:

   Ditentukan P = kejadian pemegang polis adalah perokok dan M = kejadian seorang pemegang polis menunggal

   Diketahui: $P(P) = 0{,}10; P(P^C) = 0{,}90; P(M|P) = 0{,}05; P(M|P^C) = 0{,}01$

   Ditanya: $P(P|M)$

   Jawab:

   Menurut Teorema Bayes $P(P|M) = \frac{P(M|P)P(P)}{P(M|P)P(P)+P\left(M\middle|P^C\right)P(P^C)}$, sehingga

$$P(P|M) = \frac{P(M|P)P(P)}{P(M|P)P(P) + P(M|P^C)P(P^C)}$$

$$= \frac{(0{,}05)(0{,}10)}{(0{,}05)(0{,}10) + (0{,}01)(0{,}90)}$$

$$= \frac{0{,}005}{0{,}014} = 0{,}36$$

   Jadi jawaban yang benar adalah C

8. Suatu tes yang dilakukan untuk mendiagnosa suatu penyakit yang diderita seseorang menunjukkan hasil positif dengan probabilitas 0,85. Probabilitas tes menunjukkan hasil negatif tetapi orang tersebut terjangkit penyakit adalah 0,10. Jika 1% dari populasi terjangkit penyakit, tentukan probabilitas dari hasil tes positif seseorang terjangkit penyakit
   a. 0,0085
   b. 0,0791
   c. 0,1075
   d. 0,1500
   e. 0,9000

   Penyelesaian:

   Ditentukan D = kejadian seseorang terjangkit penyakit dan P = kejadian hasil tes positif

   Diketahui: $P(P|D) = 0{,}85; P(P|D^C) = 0{,}10;\ P(D) = 0{,}01$

   Ditanya: $P(D|P)$

   Jawab:

   Menurut Teorema Bayes

   $$P(D|P) = \frac{P(P|D)P(D)}{P(P|D)P(D)+P(P|D^C)P(D^C)}$$

   Karena $P(P|D) = 0{,}85; P(P|D^C) = 0{,}10;\ P(D) = 0{,}01$ dan $P(D^C) = 0{,}99$, maka

   $$\begin{aligned} P(D|P) &= \frac{P(P|D)P(D)}{P(P|D)P(D)+P(P|D^C)P(D^C)} \\ &= \frac{(0{,}85)(0{,}01)}{(0{,}85)(0{,}01)+(0{,}10)(0{,}99)} \\ &= 0{,}0791 \end{aligned}$$

   Jadi jawaban yang benar adalah B

9. 60% sopir baru mempunyai pendidikan sopir. Pada tahun pertama, sopir baru yang tidak mempunyai pendidikan pengemudi mengalami kecelakaan mempunyai probabilitas 0,08, tetapi sopir baru yang telah menempuh pendidikan pengemudi mengalami kecelakaan mempunyai probabiltas 0,05. Tentukan dari pengemudi yang tidak mengalami kecelakaan, sopir baru tersebut telah menempuh pendidikan mengemudi

a. $\frac{5}{6}$

b. $\frac{(0{,}92)(0{,}4)}{(0{,}95)(0{,}6)+(0{,}92)(0{,}4)}$

c. $\frac{(0{,}95)(0{,}4)}{(0{,}95)(0{,}6)+(0{,}92)(0{,}4)}$

d. $\frac{(0{,}95)(0{,}4)}{(0{,}95)(0{,}4)+(0{,}92)(0{,}6)}$

e. $\frac{(0{,}95)(0{,}6)}{(0{,}95)(0{,}6)+(0{,}92)(0{,}4)}$

Penyelesaian:

Ditentukan K = kejadian pada tahun pertama pengemudi mengalami kecelakaan dan S = kejadian sopir baru telah menempuh pendidikan pengemudi

Diketahui: $P(S) = 0{,}60; P(K|S^C) = 0{,}08; P(K|S) = 0{,}05$

Ditanya: $P(S|K^C)$

Jawab:

Karena $P(K|S^C) = 0{,}08$, maka $P(K^C|S^C) = 1 - P(K|S^C) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$. Karena $P(K|S) = 0{,}05$, maka $P(K^C|S) = 1 - P(K|S) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Karena $P(K^C|S^C) = 0{,}92$ dan $P(K^C|S) = 0{,}95$, maka $P(K^C) = P(K^C \cap S) + P(K^C \cap S^C)$, sehingga $P(K^C) = P(K^C|S^C)P(S^C) + P(K^C|S)P(S) = (0{,}92)(1 - 0{,}60) + (0{,}95)(0{,}60) = (0{,}92)(0{,}40) + (0{,}95)(0{,}60)$. Karena $P(K^C) = (0{,}92)(0{,}40) + (0{,}95)(0{,}60)$ dan $P(S \cap K^C) = (0{,}95)(0{,}60)$, maka $P(S|K^C) = \frac{P(S \cap K^C)}{P(K^C)} = \frac{(0{,}95)(0{,}60),}{(0{,}95)(0{,}60)+(0{,}92)(0{,}40)}$. Jadi jawaban yang benar adalah E.

10. Sekolompok orang yang berada dalam suatu kota didata pada bulan apa mereka dilahirkan. Jika diasumsikan jika bulan kelahiran didistribusikan secara seragam, jadi setiap orang mempunyai kemungkinan yang sama untuk lahir disembarang bulan. Tentukan jumlah orang yang dibutuhkan jika probabilitas bahwa tidak ada dua orang lahir pada bulan yang sama kurang dari 0,5

a. 2

b. 3

c. 4

d. 5

e. 6

Penyelesaian:

Ditentukan A_i = kejadian orang kedua mempunyai bulan lahir berbeda dengan dengan orang ke-i-1

Ditanya: Jumlah orang dimana probabiltas mereka lahir dibulan yang berbeda kurang dari 0,5

Jawab:

Ambil A_2 = adalah kejadian orang kedua memiliki bulan lahir berbeda dengan orang pertama, sehingga $P(A_2) = \frac{11}{12} = 0{,}9167$

Ambil A_3 = adalah kejadian orang kedua memiliki bulan lahir berbeda dengan orang pertama dan kedua, sehingga

$P(A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_2)P(A_2) = \left(\frac{10}{12}\right)\left(\frac{11}{12}\right) = 0{,}7639.$

Ambil A_4 = adalah kejadian orang ke-empat memiliki bulan lahir berbeda dengan orang pertama, kedua dan ketiga, sehingga

$$\begin{aligned} P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_4|A_2 \cap A_3)P(A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_4|A_2 \cap A_3)P(A_3|A_2)P(A_2) \\ &= \left(\frac{9}{12}\right)\left(\frac{10}{12}\right)\left(\frac{11}{12}\right) = 0{,}5729 \end{aligned}$$

Ambil A_5 = adalah kejadian orang ke-lima memiliki bulan lahir berbeda dengan orang pertama, kedua, ketiga dan ke-empat, sehingga

$$\begin{aligned} P(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) &= P(A_5|A_2 \cap A_3 \cap A_4)P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= P(A_5|A_2 \cap A_3 \cap A_4)P(A_4|A_2 \cap A_3)P(A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_5|A_2 \cap A_3 \cap A_4)P(A_4|A_2 \cap A_3)P(A_3|A_2)P(A_2) \\ &= \left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{9}{12}\right)\left(\frac{10}{12}\right)\left(\frac{11}{12}\right) = 0{,}3819 \end{aligned}$$

Karena $P(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = 0{,}3819 < 0{,}5$, maka terdapat minimal 5 orang yang memiliki probabilitas lahir pada bulan yang sama kurang dari 0,5. Jadi jawaban yang benar adalah D.

11. Suatu tes untuk mendeteksi suatu penyakit pada seseorang yang menderita penyakit menunjukkan positif mempunyai probabilitas 0,85. Probabilitas tes menunjukkan positif tetapi orang tersebut tidak mengidap penyakit adalah 0,10. Jika 1% orang dalam populasi mengidap penyakit, tentukan berapa probabilitas seseorang dalam populasi yang tesnya positif ternyata mengidap penyakit tersebut adalah
    a. 0,0085
    b. 0,0791

c. 0,1075
d. 0,1500
e. 0,9000

Penyelesaian:

Ditentukan D = adalah kejadian bahwa seseorang mengidap penyakit, dan P = tes menunjukkan tes positif

Diketahui: $P(D) = 0{,}01; P(P|D) = 0{,}85; P(P|D^C) = 0{,}10$

Ditanya: $P(D|P)$

Jawab:

Karena $P(D|P) = \frac{P(D\cap P)}{P(P)}$, dan

$P(P) = P(P \cap D) + P(P \cap D^C) = P(P|D)P(D) + P(P|D^C)P(D^C)$, maka

$$P(D|P) = \frac{P(D\cap P)}{P(P)}$$
$$= \frac{P(P|D)P(D)}{P(P|D)P(D) + P(P|D^C)P(D^C)}$$
$$= (\frac{(0{,}85)(0{,}01)}{(0{,}85)(0{,}01) + (0{,}10)(0{,}99)}$$
$$= 0{,}0791$$

Jadi jawaban yang benar adalah B

12. Seorang agen asuransi menawarkan dua macam asuransi yaitu asuransi perlindungan diri dan asuransi kebakaran rumah. Seseorang yang mempunyai asuransi kebakaran dapat menambah asuransi banjir, tetapi hanya jika dia telah memiliki asuransi kebakaran. Data yang diperoleh dari nasabah asuransi sebagai berikut:

- 80% dari seluruh nasabah memiliki asuransi perlindungan diri
- 40% dari seluruh nasabah memiliki asuransi kebakaran
- 25% dari nasabah yang mempunyai asuransi perlindungan diri juga mempunyai asuransi kebakaran
- 50% dari nasabah yang mempunyai asuransi kebakaran juga mempunyai asuransi perlindungan banjir
- 50% dari nasabah yang memiliki asuransi banjir juga memiliki asuransi perlindungan diri

Tentukan persentasi dari nasabah yang memiliki asuransi kebakaran, tetapi tidak memiliki asuransi diri dan tidak memiliki asuransi banjir

a. 0,05
b. 0,10
c. 0,15
d. 0,20
e. 0,25

Penyelesaian:

Ditentukan D = kejadian nasabah memiliki asuransi perlindungan diri, B = kejadian nasabah memiliki asuransi banjir dan K = kejadian nasabah memiliki asuransi kebakaran

Diketahui: $P(D) = 0{,}80; P(K) = 0{,}40; P(K|D) = 0{,}25; P(B|K) = 0{,}50; P(D|B) = 0{,}50, K \cap B = B$

Ditanya: $P(D^C \cap B^C | K)$

Jawab:

Karena

$P(D^C \cap B^C \cap K) = P(K) - P\big((D \cup B) \cap K\big) = P(K) - P((D \cap K) \cup (B \cap K))$,

Karena $K \cap B = B$, maka $P(D^C \cap B^C \cap K) = P(K) - P((D \cap K) \cup B)$

Karena $P(K) - P\big((D \cap K) \cup B\big) = P(K) - (P(D \cap K) + P(B) - P(D \cap K \cap B))$, maka

$P(D^C \cap B^C \cap K) = P(K) - (P(D \cap K) + P(B) - P(D \cap K \cap B))$,

karena $K \cap B = B$, maka

$P(D^C \cap B^C \cap K) = P(K) - (P(D \cap K) + P(B) - P(D \cap B))$,untuk itu harus ditentukan $P(D \cap K)$ dan $P(D \cap B)$

Karena $P(K|D) = 0{,}25$, maka $0{,}25 = P(K|D) = \frac{P(K \cap D)}{P(D)} = \frac{P(K \cap D)}{0{,}80}$, sehingga $P(K \cap D) = (0{,}25)(0{,}80) = 0{,}20$

Karena $P(B|K) = 0{,}50$, maka $0{,}50 = P(B|K) = \frac{P(B \cap K)}{P(K)} = \frac{P(B)}{P(K)} = \frac{P(B)}{0{,}40}$, sehingga diperoleh $P(B) = (0{,}50)(0{,}40) = 0{,}20$

Karena $P(D|B) = 0{,}50$, maka $0{,}50 = P(D|B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{P(D \cap B)}{0{,}20}$, sehingga diperoleh $P(D \cap B) = (0{,}50)(0{,}20) = 0{,}10$

Karena $P(K \cap D) = 0{,}20;$ $P(B) = 0{,}20; P(D \cap B) = 0{,}10,$ dan $P(K) = 0{,}40$, maka

$P(D^C \cap B^C \cap K) = P(K) - \big(P(D \cap K) + P(B) - P(D \cap B)\big)$

$$= 0{,}4 - (0{,}2 + 0{,}2 - 0{,}1) = 0{,}10$$

, sehingga

$$P(D^C \cap B^C|K) = \frac{P(D^C \cap B^C \cap K)}{P(K)} = \frac{0{,}10}{0{,}40} = 0{,}25$$

13. Diketahui kejadian $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$ dengan kondisi $P(A|B) = P(B|A)$, manakah dari pernyataan berikut yang benar
    i. A dan B independent
    ii. $P(A) = P(B)$
    iii. $A \cap B = \emptyset$, adalah
    a. Tidak ada yang benar
    b. Paling sedikit satu yang betul kecuali ii
    c. Paling sedikit dua yang betul kecuali iii
    d. Semua benar
    e. A, B, C atau D adalah salah

    <u>Penyelesaian:</u>

    Diketahui: $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$ dengan kondisi $P(A|B) = P(B|A)$

    Ditanya: berdasarkan pernyataan i, ii dan iii manakah yang benar

    Jawab:

    Jika iii salah $(A \cap B \neq \emptyset)$, maka $P(A|B) = P(B|A)$ jika hanya jika $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ jika hanya jika $P(A) = P(B)$, sehingga jika iii salah maka ii benar

    Jika $(A \cap B = \emptyset)$, maka iii benar, maka jawaban A adalah salah

    Jika $B = A \neq \emptyset$, maka jelas i dan iii adalah salah, perhatikan $P(A|B) = P(B|A)$ jika hanya jika $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ jika hanya jika $P(A) = P(B)$, jelas ii benar, sehingga terdapat satu pernyataan yang benar. Jadi jawaban yang benar adalah E yaitu tidak ada pernyataan jawaban A, B, C dan D yang benar.

14. Survei yang dilakukan terhadap anak-anak dalam suatu kota mengenai transportasi, memperoleh informasi mengenai kepemilikan SIM dan kepemilikan sepeda. Berdasarkan survei diperoleh informasi sebagai berikut:
    - 80% mempunyai SIM atau kendaraan sendiri atau keduanya
    - $\frac{1}{3}$ dari yang memiliki SIM juga memiliki kendaraan sendiri
    - $\frac{1}{2}$ dari yang memiliki kendaraan sendiri juga memiliki SIM

Dari survei yang tidak memiliki kendaran, tentukan persentase tidak memiliki SIM

a. $\frac{1}{3}$
b. $\frac{4}{9}$
c. $\frac{5}{9}$
d. $\frac{2}{3}$
e. $\frac{7}{9}$

Penyelesaian:

Ditentukan S= kejadian memiliki SIM dan K = kejadian anak-anak memiliki kendaraan sendiri

Diketahui: $P(S \cup K) = 0{,}80; P(K|S) = \frac{1}{3}; P(S|K) = \frac{1}{2}$

Ditanya: $P(S^C|K^C)$

Jawab:

Karena $P(S \cup K) = P(S) + P(K) - P(S \cap K) = 0{,}80$

Karena $P(K|S) = \frac{1}{3}$, maka $\frac{P(K \cap S)}{P(S)} = \frac{1}{3}$ dan karena $P(S|K) = \frac{1}{2}$, maka $\frac{P(K \cap S)}{P(K)} = \frac{1}{2}$

Karena $P(S) + P(K) - P(S \cap K) = 0{,}80$, maka

$\frac{P(S \cup K)}{P(S \cap K)} = \frac{P(S)+P(K)-P(S \cap K)}{P(S \cap K)} = \frac{P(S)}{P(S \cap K)} + \frac{P(K)}{P(S \cap K)} - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$

Karena $P(S \cup K) = 0{,}80$ dan $\frac{P(S \cup K)}{P(S \cap K)} = 4$, maka $P(S \cap K) = \frac{0{,}80}{4} = 0{,}20$

Karena $P(S \cap K) = 0{,}20$, maka $P(S) = 3P(K \cap S) = 3(0{,}2) = 0{,}6$ dan

$P(K) = 2P(K \cap S) = 2(0{,}2) = 0{,}4$

Karena $P(K) = 0{,}40$ dan $P(S \cup K) = 0{,}80$, maka

$P(S^C|K^C) = \frac{P(S^C \cap K^C)}{P(K^C)} = \frac{P(S \cup K)^C}{P(K^C)} = \frac{1-P(S \cup K)}{1-P(K)} = \frac{1-0{,}8}{1-0{,}4} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$. Jadi jawaban yang benar adalah A.

15. Penelitian yang dilakukan terhadap pengaruh antara tekanan darah dan kolesterol menghasilkan beberapa informasi berikut:
    - Dari seseorang yang menderita tekanan darah tinggi, 50% memiliki tekanan darah tinggi
    - Dari seseorang yang memiliki kolesterol tinggi, 80% memiliki tekanan darah tinggi

Dari seseorang yang memiliki paling tidak satu kondisi antara mengidap tekanan darah tinggi atau kolesterol tinggi, berapa persentase orang tersebut mengidap tekanan darah dan kolesterol tinggi

a. $\frac{1}{3}$

b. $\frac{4}{9}$

c. $\frac{5}{9}$

d. $\frac{2}{3}$

e. $\frac{7}{9}$

Penyelesaian:

Ditentukan D = kejadian seseorang mengidap tekanan darah tinggi dan K = kejadian seseorang mengidap kolesterol tinggi

Diketahui: $P(K|D) = 0{,}50; P(D|K) = 0{,}80$

Ditanya: $P(K \cap D|K \cup D)$

Jawab:

Karena $P(K \cap D|K \cup D) = \frac{P((K\cap D)\cap(K\cup D))}{P(K\cup D)}$

$$= \frac{P(K\cap D)}{P(K\cup D)}$$

$$= \frac{P(K\cap D)}{P(K)+P(D)-P(K\cap D)}$$

$$= \frac{1}{\frac{P(K)+P(D)-P(K\cap D)}{P(K\cap D)}}$$

Karena $P(K|D) = 0{,}50$, maka $0{,}50 = \frac{P(K\cap D)}{P(D)}$ dan karena $P(D|K) = 0{,}80$, maka $0{,}80 = \frac{P(K\cap D)}{P(K)}$

Karena $\frac{P(K\cap D)}{P(D)} = 0{,}50$ dan $\frac{P(K\cap D)}{P(K)} = 0{,}80$ maka

$$P(K \cap D|K \cup D) = \frac{1}{\frac{P(K)+P(D)-P(K\cap D)}{P(K\cap D)}}$$

$$= \frac{1}{\frac{P(K)}{P(K\cap D)}+\frac{P(D)}{P(K\cap D)}-1}$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{1}+\frac{5}{4}-1}$$

$$= \frac{4}{9}$$

Jadi jawaban yang benar adalah B

16. Penelitian terhadap atlet tentang penggunaan Dianabol dan Winstrol, menunjukkan 5% atlet menggunakan Dianabol dan tidak menggunakan Winstrol, 2% menggunakan Winstrol dan tidak menggunakan Dianabol, dan 1% menggunakan keduanya. Suatu tes dilakukan untuk mengetahui persentase kandungan obat tersebut dalam tubuh atlet. Tes yang telah dilakukan menunjukkan informasi sebagai berikut:
    - Dari atlet yang menggunakan kedua obat tersebut, tes menunjukkan 75% menggunakan dua obat tersebut, 15% hanya menggunakan Dianabol dan 10% hanya menggunakan Winstrol
    - Pada 80% atlet yang menggunakan Dianabol tetapi tidak menggunakan Winstrol, tes menunjukkan mereka menggunakan Dianabol tetapi tidak menggunakan Winstrol, dan lainnya 20% tes menunjukkan mereka menggunakan dua obat tersebut
    - Pada 60% atlet yang menggunakan Winstrol tetapi tidak menggunakan Dianabol, tes menunjukkan bahwa mereka hanya menggunakan Winstrol saja dan 40% yang lain tes menunjukkan mereka menggunakan keduanya.
    - Untuk semua atlet yang tidak menggunakan dua obat tersebut, tes selalu menunjukkan bahwa mereka tidak menggunakan obat tersebut

    Dari atlet yang tesnya menunjukkan positif untuk Dianabol tetapi negatif untuk Winstrol, tentukan persentase mereka menggunakan dua obat tersebut

    a. 1,2%
    b. 2,4%
    c. 3,6%
    d. 4,8%
    e. 6,0%

    <u>Penyelesaian:</u>

    Ditentukan D = kejadian atlet menggunakan Dianoabol, W = kejadian atlet menggunakan Winstrol, TD = kejadian tes menunjukkan atlet menggunakan Dianabol dan TW = kejadian tes menunjukkan atlet menggunakan Winstrol

    Diketahui: $P(D \cap W^C) = 0{,}05; P(W \cap D^C) = 0{,}02; P(D \cap W) = 0{,}01; P(TD \cap TW | D \cap W) = 0{,}75; P(TD \cap TW^C | D \cap W) = 0{,}15; P(TD^C \cap TW | D \cap W) = 0{,}10; P(TD \cap TW | D \cap W^C) =$

0,20; $P(TD \cap TW^C | D \cap W^C) = 0{,}80; P(TD \cap TW | D^C \cap W) =$
0,40; $P(TD^C \cap TW | D^C \cap W) = 0{,}60$

Ditanya: $P(D \cap W | TD \cap TW^C)$

Jawab:

Karena $P(D \cap W | TD \cap TW^C) = \frac{P(D \cap W \cap TD \cap TW^C)}{P(TD \cap TW^C)}$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} P(D \cap W \cap TD \cap TW^C) &= P(TD \cap TW^C | D \cap W) P(D \cap W) \\ &= (0{,}15)(0{,}10) = 0{,}0015 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} P(D^C \cap W^C) = 1 - P(D \cup W) &= 1 - P(D \cap W^C) - P(W \cap D^C) - P(D \cap W) \\ &= 1 - 0{,}05 - 0{,}02 - 0{,}01 = 0{,}92 \end{aligned}$$

Karena $D \cap W, D \cap W^C, D^C \cap W$ adalah suatu partisi, maka

$P(TD \cap TW^C) = P(TD \cap TW^C | D \cap W) P(D \cap W) +$
$P(TD \cap TW^C | D \cap W^C) P(D \cap W^C) + P(TD \cap TW^C | D^C \cap W) P(D^C \cap W) +$
$P(TD \cap TW^C | D^C \cap W^C) P(D^C \cap W^C)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P(TD \cap TW^C) &= (0{,}15)(0{,}01) + (0{,}80)(0{,}05) + (0)(0{,}02) + (0)(0{,}92) \\ &= 0{,}0015 + 0{,}04 + 0 + 0 = 0{,}0415 \end{aligned}$$

Sehingga

$$P(D \cap W | TD \cap TW^C) = \frac{P(D \cap W \cap TD \cap TW^C)}{P(TD \cap TW^C)} = \frac{0{,}0015}{0{,}0415} = 0{,}036 = 3{,}6\%$$

Jadi jawaban yang benar adalah C

17. Dalam pertandingan Sepak Bola Piala Dunia tahun 2006, menurut peringkat yang dapat diakses secara online Brazil, Inggris dan Jerman merupakan negara yang diunggulkan dapat menjadi juara. Berdasarkan survei terhadap penggemar sepak bola, diperoleh informasi bahwa 50% memprediksi Brazil pada peringkat pertama, 30% memprediksi Brazil pada posisi kedua, 30% mempredikisi Inggris pada posisi kedua, 50% memprediksi Inggris pada posisi ketiga dan 20% memprediksi Brazil pada urutan pertama dan Inggris pada urutan kedua. Dari hasil survei yang menyatakan Inggris pada posisi pertama, persentase Brazil pada urutan ketiga adalah
    a. $\frac{1}{4}$
    b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{2}$

d. $\frac{2}{3}$

e. $\frac{3}{4}$

Penyelesaian

Ditentukan B = Brazil, I = Inggris, dan J = Jerman

Diketahui:

Kemungkinan susunan peringkat kedua negara adalah BIJ, BJI, JBI, JIB, IBJ, IJB

Sehingga $P(BIJ) + P(BJI) = 0{,}50; P(JBI) + P(IBJ) = 0{,}30; P(BIJ) + P(JIB) = 0{,}30; P(BJI) + P(JBI) = 0{,}50;\ P(BIJ) = 0{,}20$

Ditanya: $P(IJB|IBJ \cup IJB)$

Jawab:

Ditanyakan $P(IJB|IBJ \cup IJB) = \frac{P(IJB)}{P(IBJ \cup IJB)} = \frac{P(IJB)}{P(IBJ)+P(IJB)}$

Berdasarkan informasi $P(BIJ) + P(JIB) = 0{,}30; P(BJI) + P(JBI) = 0{,}50$, ini menunjukkan bahwa probabilitas Inggris pada posisi kedua atau ketiga adalah 0,80. Dengan kata lain, probabilitas Inggris pada posisi pertama adalah 0,20, sehingga $P(IJB) + P(IBJ) = 0{,}20$. Karena $P(BIJ) = 0{,}20$, maka $P(BJI) = 0{,}30$, sehingga $0{,}30 + P(JBI) = 0{,}50$, diperoleh $P(JBI) = 0{,}20$. Karena $P(JBI) = 0{,}20$, maka $(0{,}20 + P(IBJ) = 0{,}30$, diperoleh $P(IBJ) = 0{,}10$. Karena $P(IBJ) = 0{,}10$, maka $P(IJB) + 0{,}10 = 0{,}20$, diperoleh $P(IJB) = 0{,}10$

Karena $P(IBJ) = 0{,}10;\ P(IJB) = 0{,}10$; maka

$$P(IJB|IBJ \cup IJB) = \frac{P(IJB)}{P(IBJ \cup IJB)} = \frac{P(IJB)}{P(IBJ) + P(IJB)} = \frac{0{,}10}{0{,}10 + 0{,}10} = \frac{1}{2}$$

Jadi jawaban yang benar adalah C

18. Dalam pertandingan Sepak Bola Piala Dunia tahun 2006, menurut peringkat yang dapat diakses secara online Brazil, Inggris dan Jerman merupakan negara yang diunggulkan dapat menjadi juara. Berdasarkan survei terhadap penggemar sepak bola, diperoleh informasi bahwa
    - 2/3 dari fans yang memprediksi Jerman pada posisi pertama, meprediksi juga Brazil pada posisi kedua
    - 1/7 dari fans yang tidak memprediksi Jerman pada posisi pertama, memprediksi juga Brazil pada posisi kedua

- 30% fans memprediksi Brazil berada pada posisi kedua

Dari fans yang memprediksi Brazil pada posisi kedua, tentukan probabilitas fans memprediksi Jerman pada posisi ketiga

a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{1}{2}$

d. $\frac{2}{3}$

e. $\frac{3}{4}$

Penyelesaian:

Ditentukan B2 = kejadian Brazil diprediksi pada posisi kedua, dan J1 = kejadian Jerman diperdiksi pada posisi pertama

Diketahui: $P(B2|J1) = \frac{2}{3}; P(B2|JI^C) = \frac{1}{7}; P(B2) = 0{,}30$

Ditanya: $P(J3|B2)$

Jawab:

Ditentukan $P(J3|B2) = \frac{P(J3\cap B2)}{P(B2)}$

Karena $P(B2|J1) = \frac{2}{3}$, maka $P(B2 \cap J1) = P(B2|J1)P(J1) = \frac{2}{3}P(J1)$

Karena $P(B2|JI^C) = \frac{1}{7}$, maka $P(B2 \cap J1^C) = P(B2|JI^C)P(J1^C) = \frac{1}{7}P(J1^C)$

Karena $P(B2 \cap J1) = \frac{2}{3}P(J1)$ dan $P(B2 \cap J1^C) = \frac{1}{7}P(J1^C)$, maka

$$\begin{aligned} P(B2) &= P(B2 \cap J1) + P(B2 \cap J1^C) \\ &= \frac{2}{3}P(J1) + \frac{1}{7}P(J1^C) = \frac{2}{3}P(J1) + \frac{1}{7}(1 - P(J1)) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $0{,}30 = \frac{18}{21}P(J1) + \frac{1}{7}$, diperoleh $P(J1) = 0{,}3$, diperoleh juga $P(J3) = P(J1^C) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Karena $P(J3) = P(J1^C) = 0{,}7$,

maka $P(B2 \cap J1^C) = \frac{1}{7}(0{,}70) = 0{,}10$

Karena $P(B2 \cap J1^C) = P(B2 \cap J3) = 0{,}10$ dan $P(B2) = 0{,}30$, maka

$$P(J3|B2) = \frac{P(J3 \cap B2)}{P(B2)} = \frac{0{,}10}{0{,}30} = \frac{1}{3}$$

Jadi jawaban yang benar adalah B

19. Penelitian terhadap suatu penyakit menunjukkan bahwa 1% dari populasi mengidap penyakit tersebut dan 2% populasi memiliki riwayat keluarga yang mengdidap penyakit tersebut. Suatu tes genetik dilakukan untuk memprediksi apakah sesorang mengiadap atau tidak mengidap penyakit tersebut. Dari populasi yang memiliki riwayat keluarganya mengidap penyakit, 20% tes genetik menunjukkan bahwa sesorang mengidap penyakit dan keluarganya tidak memiliki riwayat mengidap penyakit yang dimaksud, 1% tes genetik menunjukkan sesorang mengidap penyakit. Ternyata tes genetik tersebut tidak sempurna, faktanya dari seseorang yang memiliki riwayat keluarga mengidap penyakit dan tes genetiknya menunjukkan bahwa mereka mengidap penyakit, 80% mengidap penyakit tersebut. Juga didapatkan fakta bahwa untuk seseorang dengan latar belakang keluarga pengidap penyakit dan tes tidak menunjukan mereka terjangkit penyakit, 10% mereka ternyata mengidap penyakit. Tentukan probabilitas sesorang dengan latar belakang keluarga memiliki riwayat mengidap penyakit, mereka mengidap penyakit
    a. 0,20
    b. 0,22
    c. 0,24
    d. 0,26
    e. 0,28

    <u>Penyelesaian:</u>

    Ditentukan R =kejadian seseorang dengan latar belakang keluarga yang mengidap penyakit, T = kajadian tes genetik menunjukkan bahwa seseorang mengidap penyakit dan D = kejadian seseorang mengidap penyakit

    Diketahui: $P(D) = 0{,}01; P(R) = 0{,}02, P(T|R) = 0{,}2; P(T|R^C) = 0{,}01; P(D|R \cap T) = 0{,}8; P(D|R \cap T^C) = 0{,}1$

    Ditanya: $P(D|R)$

    Jawab:

    Ditentukan $P(D|R) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)}$

    Karena $P(T|R) = 0{,}2$ dan $P(R) = 0{,}02$,

    maka $P(T \cap R) = P(T|R)P(R) = 0{,}004$

    Karena $P(T|R^C) = 0{,}01$ dan $P(R^C) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$, maka

    $P(T \cap R^C) = P(T|R^C)P(R^C) = (0{,}01)(0{,}98) = 0{,}0098.$

Karena $P(T \cap R) = 0{,}004$ dan $P(T \cap R^C) = 0{,}0098$, maka

$P(T) = P(T \cap R) + P(T \cap R^C) = 0{,}004 + 0{,}0098 = 0{,}0138.$

Karena $P(D|R \cap T) = 0{,}8$, dan $P(T \cap R) = 0{,}004$

maka $P(D \cap R \cap T) = P(D|R \cap T)P(R \cap T) = (0{,}8)(0{,}004) = 0{,}0032$

Karena $P(D|R \cap T^C) = 0{,}1$, dan $P(T \cap R^C) = 0{,}0098$

maka $P(D \cap R \cap T^C) = P(D|R \cap T^C)P(R \cap T^C) = 0{,}1\ (0{,}0098)$

20. Diketahui $P(A|B) = 0{,}40 = P(A^C|B^C)$ dan $P(A) = 0{,}50$. Tentukan $P(B)$
    a. 0,4
    b. 0,5
    c. 0,6
    d. 0,7
    e. 0,8

    <u>Penyelesaian:</u>

    Diketahui: $P(A|B) = 0{,}40 = P(A^C|B^C)$ dan $P(A) = 0{,}50$

    Ditanya: $P(B)$

    Jawab:

    Karena $P(A|B) = 0{,}40$, maka $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0{,}4P(B)$

    Karena $0{,}40 = P(A^C|B^C)$, maka $P(A|B^C) = 1 - P(A^C|B^C) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$.

    Karena $P(A|B^C) = 0{,}60$, maka $P(A \cap B^C) = P(A|B^C)\big(1 - P(B)\big) = 0{,}60\big(1 - P(B)\big)$

    Karena $P(A) = 0{,}50$, $P(A \cap B) = 0{,}4P(B)$, $P(A \cap B^C) = 0{,}6(1 - P(B))$ maka

    $0{,}50 = P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) = 0{,}4P(B) + 0{,}6\big(1 - P(B)\big)$,

    sehingga diperoleh

    $0{,}50 = 0{,}4P(B) + 0{,}6 - 0{,}6P(B) = 0{,}6 - 0{,}2P(B)$, sehingga $P(B) = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

    Jadi jawaban yang benar adalah B

21. Sebuah tas berisi 3 bola merah, 2 bola putih dan 3 bola biru. Tiga bola diambil secara acak dari tas tanpa pengembalian. Dari kemungkinan bukan bola biru yang terambil, tentukan probabilitas terambilnya jumlah bola merah lebih besar daripada bola putih.
    a. $\frac{3}{8}$
    b. $\frac{3}{5}$

c. $\frac{7}{10}$

d. $\frac{81}{512}$

e. $\frac{81}{125}$

<u>Penyelesaian:</u>

Ditentukan M = kejadian bola merah yang terambil dari tas, P = kejadian terambil bola putih dari tas dan B = kejadian bola biru yang terambil dari tas

Ditentukan juga A = kejadian terambilnya selain bola biru dan B = kejadian terambilnya bola merah dengan jumlah lebih besar daripada jumlah bola putih

Diketahui:

Jumlah bola dalam tas 8 bola yang terdiri 3 bola merah, 2 bola putih dan 3 bola biru

Ditanya: $P(B|A)$

Jawab:

Ditentukan $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Probabilitas terambilnya bukan bola biru dalam pengambilan 3 bola dalam tas dengan pengembalian adalah $P(A) = \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{125}{512}$

Kejadian $A \cap B = \{MMM, MMP, MPM, PMM\}$, sehingga

$P(MMM) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{27}{512}$, $P(MMP) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{18}{512}$,

$P(MPM) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{18}{512}$, dan $P(PMM) = \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{18}{512}$

Sehingga $P(A \cap B) = \frac{27}{512} + \frac{18}{512} + \frac{18}{512} + \frac{18}{512} = \frac{81}{512}$,

Karena $P(A \cap B) = \frac{81}{512}$ dan $P(A) == \frac{81}{512}$, sehingga diperoleh

$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{81}{512}}{\frac{125}{512}} = \frac{81}{125}$. Jadi jawaban yang benar adalah E

22. Diketahui

$P(A) = 0{,}6, P(B) = 0{,}5, P(C) = 0{,}4, P(A \cup B) = 1, P(A \cup C) = 0{,}7,$

dan $P(B \cup C) = 0{,}7$.

Tentukan $P(A \cap B \cap C|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

a. 0,10

b. 0,15

c. 0,20

d. 0,25

e. Tidak bisa ditentukan dari informasi yang diberikan di atas

Penyelesaian:

Diketahui:

$P(A) = 0{,}6, P(B) = 0{,}5, P(C) = 0{,}4, P(A \cup B) = 1, P(A \cup C) = 0{,}7,$

dan $P(B \cup C) = 0{,}7$

Ditanya: $P(A \cap B \cap C|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Jawab:

$$P(A \cap B \cap C|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = \frac{P(A\cap B\cap C)\cap((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))}{P(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)}$$

$$= \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)}$$

Karena $P(A) = 0{,}6, P(B) = 0{,}5$ dan $P(A \cup B) = 1$, maka

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 1 = 0{,}1$$

Karena $P(A) = 0{,}6$, $P(C) = 0{,}4$ dan $P(A \cup C) = 0{,}7$, maka

$$P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C) = 0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}7 = 0{,}3$$

Karena $P(B) = 0{,}5, P(C) = 0{,}4$ dan $P(B \cup C) = 0{,}7$, maka

$$P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}7 = 0{,}2$$

Karena $P(A \cup B \cup C) = 1$, maka

$$P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A \cup B \cup C) - (P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C))$$

$$= 1 - (0{,}6 + 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}1 - 0{,}3 - 0{,}3) = 0{,}1$$

Perhatikan bahwa

$$P(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 3P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2P(A \cap B \cap C)$$

$= 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 - 2(0{,}1) = 0{,}40$, diperoleh

$$P(A \cap B \cap C|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)}$$

$$= \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Jadi jawaban yang benar adalah D

BAB TIGA
PERMUTASI DAN KOMBINASI

3.1. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa dapat

a. Memahami konsep permutasi dan kombinasi
b. Menerapkan konsep permutasi dan kombinasi untuk menyelesaikan masalah

3.2.Rangkuman Materi

a. Apabila terdapat m elemen $a_1, a_2, \dots, a_m$ dan n elemen $b_1, b_2, \dots, b_n$, maka dapat dibuat mn pasangan yang masing-masing memuat satu elemen dari tiap kelompok
b. Diberikan k kelompok, terdapat n_1 elemen di kelompok 1, terdapat n_2 elemen di kelompok 2, dan seterusnya terdapat n_k elemen di kelompok n, maka banyak cara memilih satu elemen dari masing-masing k kelompok adalah $n_1 n_2 \dots n_k$
c. Penyusunan dengan memperhatikan urutan dari r obyek yang berbeda dinamakan permutasi. Banyak cara mengurutkan n benda yang berbeda yang diambil r sekaligus dinyatakan P_r^n yaitu $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$
d. Banyak kombinasi dari n objek yang diambil r sekaligus dinaotasikan $C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
e. Banyak permutasi n benda berlainan yang disusun melingkar adalah $(n-1)!$
f. Banyak cara mendistribusikan n bola yang berbeda ke dalam k kotak berbeda adalah k^n
g. Banyak cara n bola yang tidapat dibedakan dapat didistribusikan ke dalam k kotak yang berbeda adalah $\binom{k+n-1}{n}$. Jika $n > k$ dan tidak satu kotakpun yang kosong maka $\binom{n-1}{k-1}$
h. Banyak permutasi n benda berlainan bila n_1 diantaranya berjenis pertama, n_2 diantaranya berjenis kedua, dan seterusnya n_k diantaranya berjenis ke-k adalah $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
i. Banyak cara membuat sekat n benda dalam r sel masing-masing berisi n_1 elemen dalam sel pertama, n_2 elemen dalam sel kedua, dan seterusnya adalah $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$

3.3.Contoh Soal dan Penyelesaiannya

1. Satu koin dan satu dadu dilempar bersama. Berapa banyak kejadian sederhana yang dapat diperoleh?

   Penyelesaian:

   Diketahui: satu mata uang dan satu dadu dilempar bersama

   Ditanya: banyak kejadian sederhana yang mungkin muncul

   Jawab:

   Satu koin dilempar mempunyai kemungkina muncul 2 kemungkinan yaitu gambar atau angka, sedangkan dadu dilempar mempunyai 6 kemungkinan muncul yaitu muncul mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, atau 6. Sehingga banyak kejadian sederhana yang dapat diperoleh adalah 2.6 = 12 kejadian.

2. Berapa banyak kejadian dalam ruang sample jika tiga koin dilempar bersama

   Penyelesaian:

   Diketahui: tiga koin dilempar bersama

   Ditanya: banyak kejadian dalam ruang sampel

   Jawab:

   Karena tiap koin mempunyai dua kemungkinan kejadian yaitu muncul angka atau gambar dalam satu lempar, maka banyak kejadian dalam ruang sampel yang terjadi adalah 2.2.2 = 8

3. Diberikan tiga huruf yang berbeda, dari huruf tersebut disusun dua huruf berbeda. Tentukan banyak susunan yang terjadi

   Penyelesaian:

   Diketahui: terdapat tiga huruf berbeda misal A. B dab C

   Ditanya: Dari huruf A, B dan C akan disusun 2 huruf berbeda, berapa banyak susuna huruf yang terjadi

   Jawab:

   Karena tersedia tiga huruf yaitu A, B dan C, maka susuna dua huruf yang terjadi adalah AB, AC, BC, BA, CA, CB sebanyak 6 yang dapat dihitung dengan menggunakan $P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3.2.1}{1} = 6$

4. Misalkan dari soal nomor 3, urutan huruf yang terbentuk tidak diperhatikan sehingga akan diperoleh kombinasi 2 huruf dari 3 huruf. Tentukan banyak susunan yang terbentuk

   Penyelesaian:

   Diketahui: Terdapat 3 huruf yang akan 2 huruf tanpa memperhatikan urutan

   Ditanya: C_2^3

   Jawab:

   Kombinasi dari 3 huruf yang diambil 2 huruf berbeda adalah $C_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{2!} = 3$, yaitu AB, AC dan BC.

5. Ada berapa cara empat pohon yang berbeda dapat ditanam secara melingkar

   Penyelesaian:

   Karena terdapat empat phon berbeda yang kan ditanam berbeda yang ditanam melingkar

   Diketahui: $n = 4$

   Ditanya: $(n-1)!$

   Jawab:

   Karena banyak susunan melingkar n objek berbeda adalah $(n-1)!$, maka untuk n = 4, maka banyak susunan melingkar 4 elemen berbeda adalah $(4-1)! = 3! = 3.2.1 = 6$

   Jadi banyak susunan melingkar 4 elemen berbeda adalah 6 cara

6. Tentukan banyak cara tiga bola yang berbeda dapat didistribusikan ke dalam dua kotak berbeda adalah

   Penyelesaian:

   Diketahui: terdapat 3 bola yang akan didistribusikan ke dalam dua kotak

   Ditanya: tentukan banyak caranya

   Jawab:

   Karena terdapat $n = 3$, maka tiga bola tersebut dapat diditribusikan kie dalam $k = 2$ kotak yang berbeda dengan $2^3 = 8$ cara.

7. Berapa carakah 2 bola yang tidak dapat dibedakan didistribusikan ke dalam 3 kotak yang berbeda,? Berapa carakah 3 bola yang tidak dapat dibedakan dapat didistribusikan ke dalam dua kotak yang berbeda dan tidak ada satu kotakpun yang kosong?

   Penyelesaian:

   Diketahui: $n = 2$ bola yang tidak dapat dibedakan didistribusikan ke dalam $k = 3$ kotak yang berbeda

   Ditanya:

Jawab:

Karena terdapat $n = 2$ bola yang tidak dapat dibedakan didistribusikan ke dalam $k = 3$ kotak yang berbeda, maka banyak cara adalah

$$\binom{k+n-1}{n} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

Karena terdapat Banyak cara yang terjadi $n = 3$ bola yang tidak dapat dibedakan didistribusikan ke dalam $k = 2$ kotak yang berbeda dengan $n = 3 > k = 2$ serta tidak satu kotakpun kosong adalah

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{3-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$$

8. Sebuah jalan dihiasi dengan 9 bola lampu yang dirangkai seri. Tentukan banyak cara menyusun 9 bola lampu itu bila tiga diantaranya berwarna putih, empat kuning dan dua biru

Penyelesaian:

Ditentukan n = banyak bola, n_p = banyak bola putih, n_k = banyak bola kuning dan n_b = banyak bola biru

Diketahui: $n = 9, n_p = 3, n_k = 4, n_b = 2$

Jawab:

Karena $n = 9, n_p = 3, n_k = 4, n_b = 2$, maka

$$\frac{n!}{n_p!\,n_k!\,n_b!} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1260$$

9. Tentukan suku konstanta dalam ekspansi $(x + \frac{1}{x^2})^9$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan teorema binomial diperoleh

$(x + \frac{1}{x^2})^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (x)^k (\frac{1}{x^2})^{9-k} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} x^{3k-18}$, suku konstantanya sama dengan $3k - 18 = 0$ sehingga $k = 6$. Akibatnya $\binom{9}{6} = \frac{9!}{3!6!} = 84$

10. Pada sebuah rak buku terdapat 5 buku matematika dan 4 buku kimia. Berapakah banyak cara supaya 2 buku matematika tertentu akan terletak berdampingan

Penyelesaian:

Apabila dianggap bahwa 2 buku matematika tertentu dapat digantikan sebagai 1 buku sehingga ada total 8 buku yang dapat diatur sehingga ada permutasi 8 buku dari 8 buku yang tersedia yaitu $P_8^8 = 8!$ cara dan diantara 2 buku tersebut dapat dibuat permutasi $P_2^2 = 2!$, sehingga total ada 8! 2! cara

3.4.Lembar Kerja Mahasiswa (LKM)

1. Suatu kelas terdiri dari 8 anak laki-laki dan 7 anak wanita. Guru kelas tersebut memilih tiga orang anak secara random tanpa pengembalian. Tentukan probabilitas bahwa jumlah anak laki-laki yang terpilih lebih banyak dari anak wanita
   a. $\frac{512}{3375}$
   b. $\frac{28}{65}$
   c. $\frac{8}{15}$
   d. $\frac{1856}{3375}$
   e. $\frac{36}{65}$

   <u>Penyelesaian:</u>

   Diketahui: terdapat 15 anak yang terdiri dari 8 anak laki-laki dan 7 anak wanita, dan tiga anak diplih secara acak tanpa pengembalian

   Ditanya: Probabilitas terpilih banyak anak laki-laki lebih banyak dari anak wanita

   Jawab:

   Karena terdapat 15 anak dan diplih tiga anak secara acak tanpa pengembalian, maka banyak cara memilih tiga anak tersebut merupakan kombinasi 3 anak dari a5 anak yaitu $\binom{15}{3} = \frac{15!}{(15-3)!3!} = 455$. Banyak anak laki-laki yang terpilih lebih banyak daripada anak wanita adalah:

   Terpilih tiga anak laki-laki dan tidak ada anak wanita yang terpilih yaitu $\binom{8}{3}\binom{7}{0} = \frac{8!}{5!3!}\frac{7!}{0!7!} = 56$, sehingga probabilitas terpilihnya tiga anak laki-laki dari 15 anak yaitu $\frac{56}{455}$

   Terpilih dua anak laki-laki dan satu anak wanita yaitu $\binom{8}{2}\binom{7}{1} = \frac{8!}{6!2!}\frac{7!}{6!1!} = 196$, sehingga probabiltas terpilihnya dua anak laki-laki dan satu anak wanita dari 15 anak yaitu $\frac{196}{455}$

   Jadi probabilitas terpilihnya tiga anak dimana banyak anak laki-laki lebih banyak dari anak wanita dari 15 anak yaitu $\frac{56}{455} + \frac{196}{455} = \frac{36}{65}$. Jadi jawaban yang benar adalah E

2. Terdapat 97 laki-laki dan 3 wanita dalam suatu organisasi. Komite yang terdiri dari 5 orang dipilih secara random dan salah satunya dipilih menjadi ketua. Berapa probabilitas bahwa komite terdiri dari 3 wanita dan seorang wanita tersebut sebagai ketua
   a. $\frac{3(4!97!)}{2(100!)}$
   b. $\frac{5!(97!)}{2(100!)}$
   c. $\frac{3(5!97!)}{2(100!)}$
   d. $\frac{3!5!97!}{100!}$
   e. $\frac{3^3 97^2}{100^5}$

   Penyelesaian:

   Ditentukan A = adalah kejadian seorang wanita terpilih sebagai ketua dan B = adalah kejadian dalam anggota komite semua wanita terpilih

   Diketahui:

   Banyak orang 100 orang, banyak laki-laki 97 orang dan banyak perempuan 3 orang

   Ditanya: $P(A \cap B)$

   Jawab:

   Karena wanita sebagai ketua terpilih dari 5 anggota komite, maka $P(A|B) = \frac{3}{5}$,

   Karena dipilih 5 orang dari 100 orang, maka banyak cara memilih adalah $\binom{100}{5}$ cara,

   Banyak cara memilih tiga wanita dan 2 laki-laki adalah $\binom{97}{2}$ dimana dapat dikatakan banyak cara memilih 2 laki-laki dari 97 laki-laki.

   Diperoleh bahwa $P(B) = \frac{\binom{97}{2}}{\binom{100}{5}} = \frac{5!97!}{2!100!}$. Karena $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, maka

   $P(A \cap B) = \frac{3}{5}\left(\frac{5!97!}{2!100!}\right) = \frac{3(4!97!)}{2!100!}$. Jadi jawaban yang benar adalah A

3. Suatu kotak berisi 4 bola merah dan 6 bola putih. Tiga bola diambil dari kotak tersebut tanpa pengembalian. Dari paling sedikit dua bola yang terambil putih, tentukan probabilitas 1 bola merah dan 2 bola putih
   a. $\frac{1}{2}$
   b. $\frac{2}{3}$
   c. $\frac{3}{4}$
   d. $\frac{9}{11}$
   e. $\frac{54}{55}$

   <u>Penyelesaian:</u>

   Ditetukan M = kejadian yang terambil i bola merah dan 2P = kejadian yang terambil dua bola putih

   Diketahui: Terdapat 10 bola yang terdiri dari 4 bola merah dan 6 bola putih

   Ditanya: $P(M, 2P|paling\ sedikit\ terambil\ 2\ bola\ putih)$

   Jawab:

   Karena akan diambil tiga bola dari 10 bola yang tersedia dari kantong, maka banyak cara pengambilan tersebut adalah $\binom{10}{3}$ cara.

   Karena yang terambil 1 bola merah dari 4 bola merah yang tersedia, dua bola putih dari 6 bola putih yang tersedia, maka banyak cara pengambilan tersebut adalah $\binom{4}{1}\binom{6}{2}$ cara, maka peluang terambil 1 bola merah dan dua bola putih adalah $P(M, 2P) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}$

   Banyak cara terambilnya 2 bola putih dari pengambilan 3 bola berarti yang terambil 2 bola putih dan 1 bola merah adalah $\binom{4}{1}\binom{6}{2}$ cara, sehingga peluang terambilnya dua bola putih dalam pengambilan tersebut adalah $\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}$

   Banyak cara terambinya 3 bola putih yang terambil dalam pengambilan tiga bola tersebut adalah $\binom{4}{0}\binom{6}{3}$ cara, sehingga peluang terambilnya tiga bola putih dalam pengambilan tersebut adalah $\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$

Banyak cara terambilnya bola putih paling sedikit 2 bola adalah $\binom{4}{1}\binom{6}{2}+\binom{4}{0}\binom{6}{3}$, sehingga peluang terambilnya paling sedikit 2 bola putih dari tiga pengambilan bola tersebut adalah $P(paling\ sedikit\ terambil\ 2\ bola\ putih)=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}+\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$

Sehingga

$$P(M,2P|paling\ sedikit\ terambil\ 2\ bola\ putih)=\frac{\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}}{\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}+\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}}=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{4}{1}\binom{6}{2}+\binom{4}{0}\binom{6}{3}}=\frac{3}{4} \quad .$$

Jadi jawaban yang benar adalah C

BAB EMPAT
VARIABEL RANDOM DAN DISTRIBUSI PROBABILITAS

4.1.Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa dapat:

1. Memahami konsep variabel random dan distribusi probabiltas baik diskrit maupun kontinu
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan variabel random, distribusi probabilitas diskrit maupun kontinu, khususnya masalah yang berkaitan dengan aktuaria

4.2.Rangkuman Materi

a. Variabel random adalah suatu fungsi dalam ruang sampel dimana memasangkan bilangan real X(s) kepada masing-masing titik sampel $s \in S$. Dengan kata lain, variabel random adalah fungsi berharga real yang didefinisikan pada ruang sampel. Variabel random menyebabkan merubah suatu kejadian dlam runag sampel ke dalam keajdian numerik dinotasikan f: Ruang sampel → Real. Jika variabel random Y hanya dapat berharga sebanyak terbilang bilangan real, maka Y disebut variabel random diskrit.

b. Contoh variabel random: Misal tiga uang koin dilempar bersama, jika M adalah kejadian muncul muka pada pelemparan mata uang dan G adalah kejadian muncul gambar pada pelemparan mata uang, seluruh kemungkinan yang terjadi merupakan anggota ruang sampel sebagai berikut

$S = \{MMM, MMG, MGM, GMM, MGG, GMG, GGM, GGG\}$, jika didefinisikan X adalah jumlah muncul muka pada pelemparan mata uang, diperoleh

$X(MMM) = 3, X(MMG) = 2, X(MGM) = 2, X(GMM) = 2, X(MGG) = 1,$

$X(GMG) = 1, X(GGM) = 1, X(GGG) = 0$, teramati bahwa $X = \{0,1,2,3\}$, disimpulkan bahwa X merupakan variabel random.

c. Variabel random diskrit: Suatu variabel X adalah diskrit dan dikatakan berdistribusi diskrit jika variabel random tersebut bernilai *finite* atau *countable finite sequence*, misal X= 1,jika muncul muka pada pelemparan urutan genap, dan X= 0, jika muncul muka pada pelemparan urutan ganjil, jadi ruang probabilitas dari X = $\{0, 1\}$. Misal Y = n, dimana n adalah banyak pelemparan sampai diperoleh muka pertama, jadi ruang probabilitas Y = $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

d. Fungsi probabilitas variabel random diskrit: fungsi probabilitas atau *the probabilitas function (pf)* dari variabel random diskrit pada umunya dinotasikan $p(x), f(x), f_X(x)$ atau p_x, berlaku: a. $0 \leq p(x) \leq 1$ dan b. $\sum_x p(x) = 1$, berikut ini diberikan macam distribusi variabel random diskrit:

- Distribusi Probabilitas Binomial

  Eksperimen binomial adalah eksperimen yang mempunyai sifat-sifat sebagai berikut: a) eksperimen mengandung n trial yang identik, b) setiap trial menghasilkan dua kemungkinan yaitu sukses dan tidak sukses, c) probabilitas sukses yaitu P(S) = p dan P(TS) = 1- p = q, d) trial-trial itu independent, e) variabel random Y adalah banyak sukses yang ditemukan dalam n trial

- Distribusi Probabilitas Poisson

  Dalam praktek sehari-hari distribusi poisson digunakan dalam perhitungan Y dari peristiwa yang jarang terjadi yaitu banyak kejadian suatu peristiwa dengan probabilitas p yang kecil dalam n trial independent (n besar) sehingga hanya diketahui harag Y rata-rata, yaitu $\mu = np$. Distribusi Poisson meruapakan model yang baik untuk menentukan distribusi probabilitas dari banyak kecelakaan mobil, kecelakaan industri, banyak partikel radioaktif yang meluruh dalam periode tertentu, dan banyak slaah ketik yang dibuat dalam suatu lembar halaman. Distribusi Poisson dapat dinyatakan sebagai berikut: $P(Y = y) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!}$ untuk $y = 0,1,2, \ldots$

- Distribusi Probabilitas Hipergeometrik

  Misalkan terdapat N benda yang terdiri atas k benda yangdiberi nama sukses sedangkan sisanya N-k akan diberi nama gagal. Akan ditentukan probabilitas memilih Y sukses dari sebanyak k yang tersedia dan n-k gagal dari sebanyak N-k yang tersedia apabila sampel acak ukuran n diambil dari N benda. Banyak sukses Y dalam percobaan geometrik dinamakan variabel random hipergeometrik. Distribusi probabilitas peubah acak hipergeometrik Y yaitu banyaknya sukses sampel acak ukuran n yang diambil dari N benda yang mengandung k bernama sukses dan N-k bernama gagal adalah $P(Y = y) = \frac{\binom{k}{y}\binom{N-k}{n-y}}{\binom{N}{n}}$ untuk $y = 0,1,2, \ldots, n$

- Distribusi Binomial Negatif dan Distribusi Geometrik

  Bila usaha yang saling bebas dilakukan berulang kali menghasilkan sukses dengan probabilitas p sedangkan gagal dengan probabilitas q = 1 – p, makadistribusi probabilitas variabel random Y yaitu banyaknya usaha yang berakhir tepat pada sukses ke-k dinyatakan dengan $P(Y = y, k, p) = \binom{y-1}{k-1} p^k q^{y-1}$,

  untuk $y = k, k+1, k+2, \ldots$

e. Diberikan sebuah himpunan A adalah bilangan-bilangan real yang merupakan *outcome* dari X, probabilitas X yang merupakan salah satu nilai dalam A adalah $P(X \in A) = \sum_{x \in A} p(x) = P(A)$.

f. Variabel random kontinu: variabel random kontinu dapat diasumsikan sebagai nilai mumerik dari interval dari bilangan real, sehingga ruang probabilitas variabel random diskrit merupakan interval. Dengan kata lain, variabel random kontinu adalah variabel random yang mengambil harga pada sebarang harga dalam suatu interval.

g. Contoh variabel random kontinu: Misalkan suatu eksperimen dilakukan dengan mencatat variabel random Y yang menunjukkan berat seorang mahasiswa UNUGIRI, ternyata diperoleh berat mahasiswa berkisar antara 25 kg sampai 200 kg. Misal diambil seorang mahasiswa UNUGIRI, ternyata berat badannya 64 kg, hal ini berarti berat mahasiswa tersebut diambil dalam selang interval (25,200)

h. Fungsi kepadatan probabilitas (*probability density function or pdf*): Variabel random kontiunu mempunyai fungsi kepadatan probabilitas (pdf) yang dinotasikan $f(x)$ atau $f_X(x)$ yang merupakan fungsi kontinu. Probabilitas bahwa X diselang (a,b) adalah $P\big(X \in (a,b)\big) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$. Jika c merupakan *single point*, maka $\int_c^c f(x)dx = 0$ dan $P(a < X < b) = P(a \le x < b) = P(a < x \le b) = P(a \le x \le b)$

i. Untuk pdf $f(x)$, harus memenuhi: a. $f(x) \ge 0$ dan b. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

   Berikut ini di berikan beberapa distribusi variabel random kontinu

   - Distribusi Normal

     Variabel random kontinu Y dinyatakan distribusi normal dengan mean μ dan variasi σ^2 jika Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas berbentuk $f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ dengan $-\infty < y < \infty$.

- Distribusi Gamma, Eksponensialdan Chi-Kuadrat

  Fungsi gamma didefinisikan $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. Sifat yang dimiliki dari fungsi Gamma adalah $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$. Dengan rumus dapat diperoleh

  $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\Gamma(\alpha-3)$, dapat dibuktikan bahwa $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Untuk $\alpha = n$ dengan n bilangan bulat dapat diperoleh

  $\Gamma(n) = (n-1)!$
- Distribusi Probabilitas Beta

  Distribusi ini mempunyai dua parameter yaitu α dan β yang didefinisikan pada interval [0,1]. Fungsi probabilitas beta didefinisikan sebagai $f(y) = \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$, untuk $0 \leq y \leq 1$ dan 0 untuk yang lain,

  dengan $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

j. Fungsi Distribusi Kumulatif: Diberikan variabel random X, fungsi ditribusi kumulatif atau cdf dari X adalah $F(x) = P(X = x)$, juga dinotasikan $F_X(x)$. Untuk variabel random diskrit cdf didefinisikan sebagai $F(x) = \sum_{w \leq x} p(w)$, dan untuk variabel random kontinu *cumulatif distribution function* (cdf) nya didefiniskan sebagai $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, dengan $F(x)$ kontinu. Survival function adalah komplemen dari fungsi distribusi yaitu $S(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$

k. Untuk sebarang cdf $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$,

   $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ dan $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

l. Variabel Random Independent: Jika X dan Y adalah dua variabel random independent, maka $P(a < X \leq b) \cap P(c < Y \leq d) = P(a < X \leq b)P(c < Y \leq d)$

m. Kondisional Distribusi X dari Kejadian A: Jika $f(x)$ adalah fungsi densitas atau fungsi probabilitas dari X,

   dan misalkan A adalah suatu kejadian, maka kondisional pdf X dari kejadian A didefinisikan sebagai $f_{X|A}(x|A) = \begin{cases} \frac{f(x)}{P(A)}, jika\ x\ merupakan\ outcome\ kejadia\ A \\ 0, jika\ x\ bukan\ outcome\ kejadian\ A \end{cases}$

4.3. Soal dan Penyelesaiannya

1. Misalkan X mempunyai fungsi densitas $f(x) = \begin{cases} 2x, untuk\ 0 < x < 1 \\ 0, yang\ lain \end{cases}$,
   a. Tunjukkan bahwa *f* memenuhi fungsi kepadatan
   b. Tentukan $P(0{,}2 < x < 0{,}5)$
   c. Tentukan $P(0{,}2 < x < 0{,}5 | x > 0{,}25)$

   Penyelesaian:

   a. Karena $f(x) \geq 0$, maka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 2x\ dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$. Jadi f memenuhi fungsi kepadatan

   b. $P(0{,}2 < x < 0{,}5) = \int_{0,2}^{0,5} 2x\ dx = x^2 \Big|_{0,2}^{0,5} = (0{,}5)^2 - (0{,}2)^2 = 0{,}25 - 0{,}04 = 0{,}21$

   c. $P(0{,}2 < x < 0{,}5 | x > 0{,}25) = \frac{P((0,2<x<0,5) \cap x>0,25)}{P(x>0,25)} = \frac{P(0,25<x<0,5)}{P(x>0,25)}$

   Karena $P(0{,}25 < x < 0{,}5) = \int_{0,25}^{0,50} 2xdx = x^2 \Big|_{0,25}^{0,5} = (0{,}5)^2 - (0{,}25)^2 = 0{,}25 - 0{,}0625 = 0{,}1875$, dan karena $P(x > 0{,}25) = \int_{0,25}^{1} 2xdx = x^2 \Big|_{0,25}^{1} = (1)^2 - (0{,}25)^2 = 1 - 0{,}0625 = 0{,}9375$, maka

   $$P(0{,}2 < x < 0{,}5 | x > 0{,}25) = \frac{P(0{,}25 < x < 0{,}5)}{P(x > 0{,}25)} = \frac{0{,}1875}{0{,}9375} = 0{,}20$$

2. Diketahui Y mempunyai pdf $f(y) = \frac{20000}{(100+y)^3}$ untuk $y > 0$,
   a. Tunjukkan bahwa *f* memenuhi fungsi densitas
   b. Tentukan $P(Y > t)$ jika $t > 0$
   c. Tentukan $P(Y > t + y | Y > t)$ jika $t > 0$

   Penyelesaian:

   a. Karena $\int_0^{\infty} \frac{20000}{(100+y)^3}\ dy = \frac{20000(100+y)^{-2}}{-2} \Big|_{y=0}^{y=\infty} = -0 + \frac{20000}{2(100)^2} = 1$, maka $f(y) \geq 0$, untuk semua y

   b. $P(Y > t) = \int_t^{\infty} \frac{20000}{(100+y)^3}\ dy = \frac{20000(100+y)^{-2}}{-2} \Big|_{y=t}^{y=\infty} = \frac{20000}{2(100+t)^2} - 0 = \frac{20000}{2(100+t)^2}$

   c. $P(Y > t + y | Y > t) = \frac{P(Y>t+y \cap Y>t)}{P(Y>t)} = \frac{P(Y>t+y)}{P(Y>t)} = \frac{\frac{10000}{(100+t+y)^2}}{\frac{10000}{(100+t)^2}} = (\frac{100+t}{100+t+y})^2$

3. Misal X adalah kejadian independent pelemparan (tos) koin sampai muka pertama muncul dan $X \geq 1$, tentukan
   a. fungsi probabilitasnya
   b. Tentukan probabilitas bahwa muka muncul setelah jumlah lemparan genap
   c. Tentukan probabilitas bahwa muka muncul setelah lemparan ke-k

   Penyelesaian:

   Diketahui: X adalah kejadian independent pelemparan (tos) koin sampai muka pertama muncul dan $X \geq 1$

   Ditanya: fungsi probabilitasnya, probabilitas bahwa muka muncul setelah jumlah lemparan genap, probabilitas bahwa muka muncul setelah lemparan ke-k

   Jawab:

   Misal muka muncul pada lemparan ke-x, maka

   $P(X = x) = P((tos1, M) \cap (tos2, M) \cap \dots (tos\ x - 1, M) \cap (tos\ x, M))$.

   Karena X kejadian independent maka

$$P(X = x) = P(tos1, M). P(tos2, M) \dots P(tosx - 1, M)P(tosx, M)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = (\frac{1}{2})^x$$

   Jadi fungsi probabilitasnya adalah $P(X = x) = (\frac{1}{2})^x$

   Dan fungsi distribusi kumulatifnya adalah

   $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{2^k} = 1 - (\frac{1}{2})^x$,

   untuk $x = 1,2,3, \dots$.

   Untuk probabilitas bahwa muka muncul setelah jumlah lemparan genap

$$P(X\ bilangan\ genap) = P(X = 2,4,6, \dots)$$
$$= P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + \cdots$$
$$= (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^6 + \cdots$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{3},$$

   sedangkan untuk probabilitas bahwa muka muncul setelah lemparan ke-k

$$P(X \geq k) = P(X = k) + P(X = k + 1) + \cdots$$
$$= \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2^k}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{2^{k-1}}, untuk\ k = 1,2,3, \ldots$$

4. Diberikan Y adalah variabel random kontinu pada interval (0,1) dengan fungsi densitas $f(y) = \begin{cases} 3y^2, untuk\ 0 < y < 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$. Tentukan
   a. Fungsi distribusi kumulatifnya
   b. $P(Y \leq \frac{1}{2})$
   c. $P(Y \geq y | Y \leq t)$, untuk $0 \leq y \leq t \leq 1$

   Penyelesaian:

   Dikeatahui: Diberikan Y adalah variabel random kontinu pada interval (0,1) dengan fungsi densitas $f(y) = \begin{cases} 3y^2, untuk\ 0 < y < 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$

   Ditanya: $F(y)$ dan $P(Y \leq \frac{1}{2})$

   Jawab:

   Perhatikan bahwa $F(y) = \int_0^y f(t)dt = \begin{cases} 0, untuk\ y < 0 \\ y^3, untuk\ 0 < y < 1 \\ 1, untuk\ y \geq 1 \end{cases}$

   Sedangkan untuk $P\left(Y \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

   Perhatikan untuk $0 \leq y \leq t \leq 1$

   $P(Y \geq y | Y \leq t) = \frac{P(Y \geq y \cap Y \leq t)}{P(Y \leq t)} = \frac{P(Y \geq y)}{P(Y \leq t)} = \frac{y^3}{t^3} = (\frac{y}{t})^3$.

5. Diketahui U adalah variabel random kontinu pada interval $(0, \infty)$ dengan fungsi densitas $f_U(u) = \begin{cases} ue^u, untuk\ u > 0 \\ 0, untuk\ u \leq 0 \end{cases}$.Tentukan fungsi distribusi kumulatifnya

   Penyelesaian:

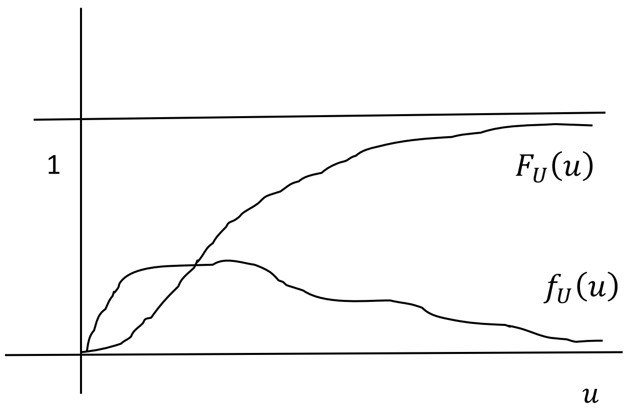
   Diketahui: U adalah variabel random kontinu pada interval $(0, \infty)$ dengan fungsi densitas $f_U(u) = \begin{cases} ue^u, untuk\ u > 0 \\ 0, untuk\ u \leq 0 \end{cases}$

   Ditanya: $F_U(u)$

   Jawab:

   $F_U(u) = \int_{-\infty}^u f(t)dt = \int_0^u te^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t} \Big|_0^u = 1 - (1+u)e^{-u}$, untuk $u > 0$.

   Jadi $F_U(u) = \begin{cases} 0, untuk\ u \leq 0 \\ 1 - (1+u)e^{-u}, untuk\ u > 0 \end{cases}$, sehingga dapat dibuat grafik



6. Z adalah variabel random berdistribusi campuran pada interval $[0,1)$, dengan Z mempunyai probabilitas 0,5 di Z = 0 dan Z mempunyai fungsi densitas $f(z) = z$, untuk $0 < z < 1$, dan Z tidak mempunyai fungsi densitas untuk yang lain. Tentukan fungsi distribusi kumlatif (cdf) nya

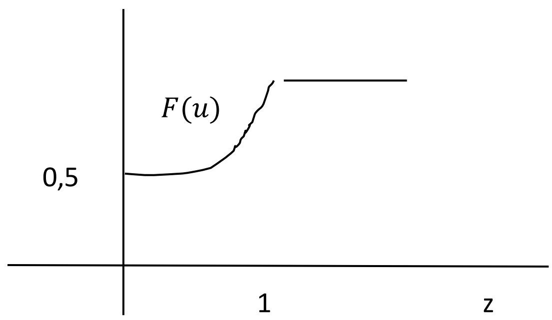
   Penyelesaian:

   Diketahui: Z adalah variabel random berdistribusi campuran pada interval $[0,1)$, dengan Z mempunyai probabilitas 0,5 di Z = 0 dan Z mempunyai fungsi densitas $f(z) = z$, untuk $0 < z < 1$, dan Z tidak mempunyai fungsi densitas untuk yang lain

   Ditanya: $F(y)$

   Jawab:

   $F(y) = \begin{cases} 0, jika\ z < 0 \\ 0{,}5\ jika\ z = 0 \\ 0{,}5 + \frac{1}{2}z^2, jika\ 0 < z < 1 \\ 1, jika\ z \geq 1 \end{cases}$, sehingga grafiknya loncat saat z = 0 dan $F(z)$ kontinu pada (0,1), seperti gambar berikut:



7. Sebuah dadu dilempar secara berulang-ulang dan independent sampai muncul mata dadau genap pertama. X adalah variabel random yang menyatakan jumlah lemparan dadu sampai mata dadu genap pertama muncul. Tentukan probabilitas bahwa X adalah bilangan genap

Penyelesaian:

Diketahui: X merupakan variabel random diskrit, dengan x = 1, 2, 3, ...

Ditanya: $P(X\ adalah\ bilangan\ genap)$

Jawab:

Perhatikan bahwa $P(X = x) = (\frac{1}{2})^x$, sehingga

$$P(X\ genap) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + \cdots$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

8. Diberikan variabel random kontinu X mempunyai fungsi densitas $f(x) = \begin{cases} 3 - 48x^2, untuk - 0,25 \leq x \leq 0,25 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$. Tentukan $P(\frac{1}{8} < x < \frac{5}{16})$

Penyelesaian:

Diketahui: variabel random kontinu X mempunyai fungsi densitas $f(x) = \begin{cases} 3 - 48x^2, untuk - 0,25 \leq x \leq 0,25 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$

Ditanya: $P(\frac{1}{8} < x < \frac{5}{16})$

Jawab:

Karena fungsi densitas hanya berlaku untuk batas tertentu yaitu $f(x) = \begin{cases} 3 - 48x^2, untuk - 0,25 \leq x \leq 0,25 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$, maka

$$P\left(\frac{1}{8} < x < \frac{5}{16}\right) = P\left(\frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}\right) = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} 3 - 48x^2 = \frac{5}{32}$$

9. Diketahui fungsi distribusi kumulatif dari variabel random kontinu X adalah $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ untuk $-\infty < x < \infty$. Tentukan fungsi densitas dari X

Penyelesaian:

Diketahui : fungsi distribusi kumulatif dari variabel random kontinu X adalah $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ untuk $-\infty < x < \infty$.

Ditanya: fungsi densitas X atau $f(x)$

Jawab:

Perhatikan karena $f(x) = F'(x)$, maka $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

10. X adalah variabel random dengan $P(X \le x) = 1 - e^{-x}$, untuk $x \ge 1$ dan $P(X \le x) = 0$, untuk $x < 1$. Berdasarkan kondisi tersebut, manakah pernyataan berikut yang benar:

a. $P(X = 2) = 1 - e^{-2}$ dan $P(X = 1) = 1 - e^{-1}$

b. $P(X = 2) = 1 - e^{-2}$ dan $P(X \le 1) = 1 - e^{-1}$

c. $P(X = 2) = 1 - e^{-2}$ dan $P(X < 1) = 1 - e^{-1}$

d. $P(X < 2) = 1 - e^{-2}$ dan $P(X < 1) = 1 - e^{-1}$

e. $P(X < 2) = 1 - e^{-2}$ dan $P(X = 1) = 1 - e^{-1}$

Penyelesaian:

Diketahui: X adalah variabel random dengan $P(X \le x) = 1 - e^{-x}$, untuk $x \ge 1$ dan $P(X \le x) = 0$, untuk $x < 1$

Ditanya: pernyataan yang benar dari beberapa pernyataan yang diberikan

Jawab:

Karena $P(X \le x) = 1 - e^{-x}$, untuk $x \ge 1$, maka $P(X = 1) = 1 - e^{-1}$ dan karena $P(X \le x) = 0$, untuk $x < 1$, maka $P(X < 1) = 0$,

maka $P(X \le 1) = P(X = 1) + P(X < 1) = 1 - e^{-x} + 0 = 1 - e^{-x}$,

maka C dan D adalah salah. Karena $P(X = x) = 0$, untuk $x > 1$

11. Suatu variabel random kontinu mempunyai fungsi densitas $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{4-2x}{3}, untuk\ \frac{1}{2} < x < 2 \\ 0, untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$. Tentukan $P(0{,}25 < x \le 1{,}250)$

Penyelesaian:

Diketahui: variabel random kontinu dengan fungsi densitas $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{4-2x}{3}, untuk\ \frac{1}{2} < x < 2 \\ 0, untuk\ yang\ lainnya \end{cases}$

Ditanya: $P(0{,}25 < x \leq 1{,}250)$

Jawab:

$$P(0{,}25 < x \leq 1{,}250) = \int_{0,25}^{1,250} f(x)dx = \int_{0,25}^{0,50} 2x\,dx + \int_{0,50}^{1,25} \frac{4-2x}{3}\,dx = \frac{3}{4}$$

12. Fungsi densitas suatu variabel random kontinu U adalah $f_U(u) = \begin{cases} e^{-u}, untuk\ u > 0 \\ 0, untuk\ u \leq 0 \end{cases}$.

Tentukan $P(U \leq 2 \,|U > 1)$

Penyelesaian:

Dikatahui: variabel random kontinu U adalah $f_U(u) = \begin{cases} e^{-u}, untuk\ u > 0 \\ 0, untuk\ u \leq 0 \end{cases}$.

Ditanya: $P(U \leq 2 \,|U > 1)$

Jawab:

$$P(U \leq 2|U > 1) = \frac{P(U\leq 2 \cap U > 1)}{P(U>1)} = \frac{P(1<U\leq 2)}{P(U>1)}$$

$$= \frac{\int_1^2 e^{-u}du}{\int_1^\infty e^{-u}du} = \frac{e^{-1}-e^{-2}}{e^{-1}} = 1 - e^{-1}$$

13. Suatu dadu dilempar sampai muncul angka genap pertama. Variabel random X didefinisikan sebagai jumlah pelemparan sehingga muncul angka genap pertama. Didefinisikan dua kejadian A = kejadian genap B = X adalah kelipatan 3. Tentukan apakah kejadian A dan B independent atau tidak

Penyelesaian:

Diketahui: X didefinisikan sebagai jumlah pelemparan sehingga muncul angka genap pertama. Didefinisikan dua kejadian A = kejadian genap B = X adalah kelipatan 3

Ditanya: Apakah A dan B independent

Jawab:

Karena kemungkinan muncul angka genap atau ganjil sama maka $P(X = x) = (\frac{1}{2})^x$

Sehingga $P(A) = P(X = 2 \cup 4 \cup 6 \ldots) = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^6 + \ \ldots = \frac{1}{3}$

Dan

$P(B) = P(X = 3 \cup 6 \cup 9 \cup \ldots) = (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^6 + (\frac{1}{2})^9 + \ \ldots = \frac{1}{7}$

Begitu juga

$P(A \cap B) = P(X = 6 \cup 12 \cup 18 \cup \ldots) = (\frac{1}{2})^6 + (\frac{1}{2})^{12} + (\frac{1}{2})^{18} + \ \ldots = \frac{1}{63}$,

Karena $P(A \cap B) = \frac{1}{63}$ dan $P(A)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{21}$, diperoleh

$\frac{1}{63} = P(A \cap B) \neq P(A)P(B) = \frac{1}{21}$, sehingga disimpulkan A dan B tidak independent.

14. Empat variabel random X_1, X_2, X_3, X_4 independent. Masing-masing variabel mempunyai fungsi densitas $f(x) = \begin{cases} 2x, untuk\ 0 < x < 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$. Didefinisikan $Y = max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ dan $Z = min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Tentukan fungsi densitas dari Y dan Z

Penyelesaian:

Diketahui: X_1, X_2, X_3, X_4 independent, fungsi densitas $f(x) = \begin{cases} 2x, untuk\ 0 < x < 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$,

$Y = max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ dan $Z = min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

Ditanya: fungsi densitas dari Y dan Z

Jawab:

Karena $f(x) = \begin{cases} 2x, untuk\ 0 < x < 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$, maka fungsi distribusi variabel random tersebut adalah $F(x) = \begin{cases} \int 2x\ dx = x^2, untuk\ 0 < x < 1 \\ 0, yang\ lain \end{cases}$,

Karena $Y = max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, dan $P(X_i \leq y) = y^2$, untuk $0 < y < 1$

maka

$F_X(x) = P(Y \leq y) = P(X_1 \leq y)P(X_2 \leq y)P(X_3 \leq y)P(X_4 \leq y) = y^2 y^2 y^2 y^2 = y^8$,

maka $f_Y(y) = 8y^7$ untuk $0 < y < 1$

Karena Z adalah *survival function* (komplemen dari fungsi distribusi)

Karena $P(X_1 > z) = 1 - P(X_1 \leq z) = 1 - z^2$

$$\begin{aligned} P(Z > z) &= P(min\{X_1, X_2, X_3, X_4\} > z) \\ &= P((X_1 > z) \cap (X_2 > z) \cap (X_3 > z) \cap (X_4 > z) \\ &= P(X_1 > z)P(X_2 > z)P(X_3 > z)P(X_4 > z) \\ &= (1 - z^2)(1 - z^2)(1 - z^2)(1 - z^2) \\ &= (1 - z^2)^4 \end{aligned}$$

$F_Z(z) = (1 - z^2)^4$ dengan $f_Z(z) = 8z(1 - z^2)^3, 0 < z < 1$

15. Diketahui X = banyak lemparan *independent* koin sampai muka pertama muncul dan $X \geq 1$ dan fungsi probabilitas $p_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{2^x}$ untuk $x = 1, 2, 3, ...$

    a. Tentukan fungsi probabilitas dari pelemparan pada urutan bilangan ganjil, muncul muka pada lemparan ≤ 3

    b. Tentukan fungsi probabilitas dari pelemparan ≤ 5, muncul muka pertama pada pelemparan ≤ 3

    Penyelesaian:

    Ditentukan A = kejadian munculnya muka pada pelemparan koin ke bilangan genap pertama, B = kejadian muncul muka pada banyak lemparan ≤ 5

    Diketahui: X = banyak lemparan *independent* koin sampai muka pertama muncul dan $X \geq 1$ dan fungsi probabilitas $p_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{2^x}$ untuk $x = 1, 2, 3, ...$

    Ditanya: $P(X \leq 3|X\ ganjil)$ dan $P(X \leq 3|X\ \leq 5)$

    Jawab:

    a. $P(A) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + \ ...$

    $$= \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \cdots$$

    $$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = \frac{2}{3}$$

    Maka $p_{X|A}(x|G\ ganjil) = \frac{p_X(x)}{P(A)} = \frac{(\frac{1}{2})^x}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\frac{1}{2^x}$, jika x adalah bilangan genap dan $p_{X|A}(x|G\ ganjil) = 0$, jika x adalah bilangan ganjil, maka

    $$P(X \leq 3|X\ ganjil) = p_{X|A}(1|G\ ganjil) + p_{X|A}(2|G\ ganjil) + p_{X|A}(3|G\ ganjil)$$

    $$= \frac{3}{2}.\frac{1}{2} + 0 + \frac{3}{2}.(\frac{1}{2})^3 = 0{,}9375$$

    Atau juga $P(X \leq 3|X\ ganjil)$ dapat ditentukan dengan

    $$P(X \leq 3|X\ ganjil) = \frac{P(X \leq 3 \cap X ganjil)}{P(X ganjil)}$$

    $$= \frac{P(X=1) + P(X=3)}{\frac{2}{3}}$$

    $$= \frac{3}{2}.\frac{1}{2} + \frac{3}{2}.(\frac{1}{2})^3$$

    b. Karena $P(B) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

    $= \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^5 = \frac{31}{32}$, maka

$p_{X|B}(x|X \leq 5) = \frac{\frac{1}{2^x}}{\frac{31}{32}}$, jika $x = 1, 2, 3, 4, 5$ dan $p_{X|A}(x|X \leq 5) = 0$, jika $x > 5$

Sehingga

$P(X \leq 3|X \ \leq 5) = p_{X|B}(1|X \leq 5) + p_{X|B}(2|X \leq 5) + p_{X|B}(3|X \leq 5) +$

$p_{X|B}(4|X \leq 5) + p_{X|B}(5|X \leq 5) = \frac{32}{31}.\frac{1}{2} + \frac{32}{31}.(\frac{1}{2})^2 + \frac{32}{31}(\frac{1}{2})^3 = 0{,}903$ atau

$$P(X \leq 3|X \ \leq 5) = \frac{P(X \leq 3 \cap X \leq 5)}{P(X \leq 5)}$$

$$= \frac{P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)}{P(X \leq 5)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3}{\frac{31}{32}} = 0{,}903$$

16. Diberikan X adalah variabel random diskrit dengan fungsi probabilitas $P(X = x) = \frac{2}{3^x}$, untuk $x = 1, 2, 3, ...$ Tentukan probabilitas untuk X adalah genap

a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{7}$

c. $\frac{1}{3}$

d. $\frac{2}{3}$

e. $\frac{3}{4}$

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui: $P(X = x) = \frac{2}{3^x}$, untuk $x = 1, 2, 3, ...$

Ditanya: $P(X = genap)$

Jawab:

$$P(X = genap) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + \ ...$$

$$= \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \ ...$$

$$= \frac{2}{3}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \cdots)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\frac{1}{3}}{1 - (\frac{1}{3})^2}\right) = \frac{1}{4}$$

17. Diketahui X adalah variabel random dengan fungsi diteribusi $F(x) = \begin{cases} 0, untuk\ x < 0 \\ \frac{x}{8}, untuk\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{x}{8}, untuk\ 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} + \frac{x}{12}, untuk\ 2 \leq x < 3 \\ 1, untuk\ x \geq 3 \end{cases}$. Tentukan $P(1 \leq X \leq 2)$

a. $\frac{1}{8}$

b. $\frac{3}{8}$

c. $\frac{7}{16}$

d. $\frac{13}{24}$

e. $\frac{19}{24}$

Penyelesaian:

Diketahui: $F(x) = \begin{cases} 0, untuk\ x < 0 \\ \frac{x}{8}, untuk\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{x}{8}, untuk\ 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} + \frac{x}{12}, untuk\ 2 \leq x < 3 \\ 1, untuk\ x \geq 3 \end{cases}$

Ditanya: $P(1 \leq X \leq 2)$

Jawab:

Karena $F(2) = \frac{3}{4} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$ dan $P(X < 1) = \lim_{x \to 1^-} F(x) = \frac{1}{8}$, sehingga $P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X < 1) = F(2) - \lim_{x \to 1^-} F(x) = \frac{11}{12} - \frac{1}{8} = \frac{19}{24}$. Jadi jawaban yang benar adalah $\frac{19}{24}$.

18. Diketahui X_1, X_2, X_3 independent, dengan distribusi variabel random seragam masing-masing mempunyai fungsi densitas $f(x) = \begin{cases} 3x^2, untuk\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$.

Jika $Y = maks\{X_1, X_2, X_3\}$, tentukan $P\left(Y > \frac{1}{2}\right)$

a. $\frac{1}{64}$

b. $\frac{37}{64}$

c. $\frac{343}{512}$

d. $\frac{7}{8}$

e. $\frac{511}{512}$

Penyelesaian:

Diketahui: $f(x) = \begin{cases} 3x^2, untuk\ 0 \le x \le 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$ dan $Y = maks\{X_1, X_2, X_3\}$, X_1, X_2, X_3 independent

Ditanya: $P\left(Y > \frac{1}{2}\right)$

Jawab:

Karena $P\left(Y > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(Y \le \frac{1}{2}\right) = 1 - P(X_1 \le \frac{1}{2} \cap X_2 \le \frac{1}{2} \cap X_3 \le \frac{1}{2})$

Karena X_1, X_2, X_3 independent, maka

$P\left(Y > \frac{1}{2}\right) = 1 - \left(P\left(X_1 \le \frac{1}{2}\right) P\left(X_2 \le \frac{1}{2}\right) P\left(X_3 \le \frac{1}{2}\right)\right) = 1 - P(X \le \frac{1}{2})^3.$

Karena $P(X \le \frac{1}{2})^3 = (\int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2 dx)^3 = (x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}})^3 = (\frac{1}{8})^3 = \frac{1}{512}.$

Jadi $P\left(Y > \frac{1}{2}\right) = 1 - P(X \le \frac{1}{2})^3 = 1 - \frac{1}{512} = \frac{511}{512}$. Jadi jawaban yang benar adalah E

19. X_1, X_2 adalah dua variabel random yang independent, tetapi dua variabel random tersebut mempunyai fungsi densitas yang sama yaitu $f(x) = \begin{cases} 2x, untuk\ 0 < x < 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$.

Tentukan probabilitas bahwa maksimum dari X_1 dan X_2 lebih dari dari 0,5

a. 0,92

b. 0,94

c. 0,96

d. 0,98

e. 1,00

Penyelesaian:

Diketahui: X_1, X_2 adalah dua variabel random yang independent dengan fungsi densitas sama yaitu $f(x) = \begin{cases} 2x, untuk\ 0 < x < 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$

Ditanya: $P(maksimum\{X_1, X_2\} \ge 0{,}50)$

Jawab:

Perhatikan karena $P\left(maksimum\{X_1, X_2\} \ge 0{,}50\right) = 1 - P((X_1 < 0{,}5) \cap (X_2 < 0{,}5))$

Karena X_1, X_2 adalah dua variabel random yang independent, maka $P\left(maksimum\{X_{1,}X_2\} \geq 0{,}50\right) = 1 - P(X_1 < 0{,}5)P(X_2 < 0{,}5)$. Ditentukan terlebuh dahulu $P(X_1 < 0{,}5) = \int_0^{0,5} 2x dx = x^2 \Big|_0^{0,5} = 0{,}25$, begitu juga karena X_1, X_2 mempunyai fungsi densitas yang sama maka $P(X_2 < 0{,}5) = \int_0^{0,5} 2x dx = x^2 \Big|_0^{0,5} = 0{,}25$, diperoleh

$$\begin{aligned} P\left(maksimum\{X_{1,}X_2\} \geq 0{,}50\right) &= 1 - P(X_1 < 0{,}5)P(X_2 < 0{,}5) \\ &= 1 - (0{,}25)(0{,}25) = 0{,}9375 \end{aligned}$$

Jadi jawaban yang benar adalah B

20. Suatu perusahaan asuransi keluarga membayar tiga klaim pertama pada tahun ini. Jika terdapat satu klaim pada tahun ini, jumlah klaim adalah berdistribusi seragam antara 100 dan 500. Jika terdapat dua klaim tahun ini, jumlah total klaim berdistribusi secara seragam antara 200 dan 1000, dan jika terdapat tiga klaim tahun ini, jumlah total klaim berdistribusi seragam antara 500 dan 2000. Probabilitas dari 0, 1, 2 dan 3 klaim tahun ini adalah 0,5; 0,3; 0,1 dan 0,1. Tentukan probabilitas bahwa perusahaan membayar lebih dari 500 dalam total klaim tahun ini

a. 0,10
b. 0,12
c. 0,14
d. 0,16
e. 0,18

<u>Penyelesaian:</u>

Ditentukan T = kejadian total klaim untuk tahun ini, dan N = ,jumlah klaim tahun ini

Diketahui:

$P\left((T \geq 500)\middle|N = 2\right) = \frac{1000-500}{1000-200} = 0{,}625,$

$P\left((T \geq 500)\middle|N = 3\right) = \frac{2000-500}{2000-500} = 1, P(N = 0) = 0{,}5; P(N = 1) = 0{,}3;$

$P(N = 2) = P(N = 3) = 0{,}1$

Ditanya: $P(T \geq 500)$

Jawab:

Karena jika terdapat 0 atau 1 klaim, total klaim harus ≤ 500, maka diperoleh

$$P(T \geq 500) = \sum_{k=0}^{3} P((T \geq 500) \cap (N = k))$$
$$= P\big((T \geq 500) \cap (N = 2)\big) + P(((T \geq 500) \cap (N = 3))$$

Perhatikan

$P\big((T \geq 500) \cap (N = 2)\big) = P\big((T \geq 500)\big|N = 2\big)P(N = 2) = \frac{1000-500}{1000-200}.(0{,}10) =$ $0{,}0625$

Dan

$P(\big((T \geq 500) \cap (N = 3)\big) = P\big((T \geq 500)\big|N = 3\big)P(N = 3) = 1.(0{,}10) = 0{,}1$, sehingga diperoleh

$P(T \geq 500) = 0{,}0625 + 0{,}10 = 0{,}1625$. Jadi jawaban yang benar adalah D

21. Bobi membaca suatu hasil penelitian bahwa seperempat dari seluruh mobil yang ada di jalan raya adalah import, dan sisanya adalah mobil domestik. Untuk membuktikan hasil penelitian tersebut Bobi mengamati mobil di jalan raya. Bobi mengasumsikan bahwa seperempat mobil yang melintas di jalan raya adalah mobil import, sisanya tiga perempat merupakan mobil domestik. Bobi memang mengemari otomotif, sehingga dia sangat mampu membedakan mobil import atau domestik. Jika asumsi Bobi benar, tentukan probabilitas bahwa Bobi akan melihat paling sedikit dua mobil import melintas di jalan raya.

Penyelesaian:

Ditentukan D = kejadian mobil yang melintas di jaan raya adalah mobil domestik dan I = kejadian mobil yang melintas adalah mobil import

Diketahui: Hal ini menunjukkan bahwa dari 4 mobil yang melintas di jalana raya diasumsikan bahwa $P(I) = \frac{1}{4}$ dan $P(D) = \frac{3}{4}$

Ditanya: $P(I \geq 2)$

Jawab:

Terdapat beberapa kemungkinan susunan dari 4 mobil yang melintas di jalan raya

Kemungkinan pertama adalah IIDD, DIDI, DDII, DIID, DIDI, IDID, sehingga untuk masing-masing susunan yang terjadi memiliki probabilitas $(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^2$, diperoleh $P(I = 2) = 6.\left(\frac{9}{256}\right) = \frac{27}{128}$

Kemungkinan kedua adalah IIID, DIII,IIDI, IIDI, sehingga untuk masing-masing susunan yang terjadi memiliki probabilitas $(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^1 = \frac{3}{64}$, diperoleh $P(I = 3) = 4.\left(\frac{3}{256}\right) = \frac{3}{64}$

Kemungkinan ketiga adalah IIII, sehingga probabilitasnya adalah $(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^0 = \frac{1}{256}$

Sehingga $P(I \geq 2) = \frac{27}{128} + \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{67}{256}$

4.4.Lembar Kerja Mahasiswa (LKM)

1. Model sejumlah klaim oleh seseorang yang memiliki proteksi kendaraan pribadi dalam kurun waktu 3 tahun adalah $n \geq 0$, yaitu $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n$, dimana p_n mempresentasikan bahwa pemegang polis melakukan n klaim dalam periode tertentu. Di bawah asumsi tersebut, tentukan probabilitas bahwa pemegang polis melakukan klaim lebih dari satu

   a. 0,04

   b. 0,16

   c. 0,20

   d. 0,80

   e. 0,96

   <u>Penyelesaian:</u>

   Ditentukan N = banyak klaim yang dilakukan pemegang polis

   Diketahui: model klaim pemegang polis tiga tahun terakhir adalah

   $n \geq 0$, yaitu $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n$

   Ditanya: $P(N > 1)$

   Jawab:

   Perhatikan karena untuk $n \geq 0$, berlaku $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n$, sehingga $p_1 = \frac{1}{5} p_0$

   Perhatikan karena untuk $n \geq 0$, berlaku $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n$, maka berlaku $p_n = \frac{1}{5} p_{n-1}$

   Sehingga $p_2 = \frac{1}{5} p_1 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} p_0\right) = (\frac{1}{5})^2 p_0$

   $p_3 = \frac{1}{5} p_2 = \frac{1}{5}\left((\frac{1}{5})^2 p_0\right) = (\frac{1}{5})^3 p_0$, $p_4 = \frac{1}{5} p_3 = \frac{1}{5}\left((\frac{1}{5})^3 p_0\right) = (\frac{1}{5})^4 p_0$,

   $p_5 = \frac{1}{5} p_4 = \frac{1}{5}\left((\frac{1}{5})^4 p_0\right) = (\frac{1}{5})^5 p_0$, $p_6 = \frac{1}{5} p_5 = \frac{1}{5}\left((\frac{1}{5})^5 p_0\right) = (\frac{1}{5})^5 p_0$, dan seterusnya

   Sehingga $p_n = (\frac{1}{5})^n p_0$, sekarang ditentukan p_0, yaitu dengan $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

   Perhatikan bahwa untuk $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, berlaku

   $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \left(1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \cdots\right) p_0 = 1$,

   sehingga $\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right) p_0 = 1$ diperoleh $p_0 = \frac{4}{5}$. Karena $p_0 = \frac{4}{5}$, maka $p_k = \left(\frac{1}{5}\right)^k (\frac{4}{5})$

   Ditentukan $P(N > 1) = 1 - P(N = 0 \text{ } atau \text{ } 1) = 1 - p_0 - p_1 = 1 - \frac{4}{5} - \left(\frac{1}{5} . \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{25} =$ 0,04. Jadi jawaban yang benar adalah A

2. Dalam suatu kota metropolitan, terdapat resiko terhadap bencana musim dingin, kebakaran dan pencurian yang diasumsikan independent, berdistribusi eksponensial dengan mean berturut 1,0; 1,5 dan 2,4. Tentukan probabilitas maksimum tiga resiko tersebut lebih dari 3
   a. 0,002
   b. 0,050
   c. 0,159
   d. 0,287
   e. 0,414

   Penyelesaian:

   Ditentukan D = kejadian bencana musim dingin, K = kejadian kebakaran dan
   P = kejadian pencurian

   Diketahui: resiko terhadap bencana musim dingin, kebakaran dan pencurian yang diasumsikan independent berdistribusi eksponensial dengan mean berturut 1,0; 1,5 dan 2,4.

   Ditanya: $P(\max(D,K,P) > 3)$

   Jawab:

   $P(\max(D,K,P) > 3) = 1 - P(\max(D,K,P) \leq 3)$

   Ditentukan

   $$\begin{aligned} P(\max(D,K,P) \leq 3) &= P(D \leq 3) \cap P(K \leq 3) \cap P(P \leq 3) \\ &= P(D \leq 3)P(K \leq 3)P(P \leq 3) \\ &= \left(1 - e^{-\frac{3}{1}}\right)\left(1 - e^{-\frac{3}{1,5}}\right)\left(1 - e^{-\frac{3}{2,4}}\right) = 0{,}586 \end{aligned}$$

   Sehingga diperoleh

   $P(\max(D,K,P) > 3) = 1 - P(\max(D,K,P) \leq 3) = 1 - 0{,}586 = 0{,}414$.

   Jadi jawaban yang benar adalah E

3. Suatu perusahaan asuransi menanggung kalim kesehatan pekerja pada suatu perusahaan. Jika V adalah banyak klaim dalam satu tahun yaitu V = 100000Y dimana Y adalah variabel random dengan fungsi densitas $f(y) = \begin{cases} k(1-y)^4, untuk\ 0 < y < 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$, dimana k adalah konstan. Dari $V > 10000$, tentukan probabilitas $V > 40000$

   a. 0,08
   b. 0,13
   c. 0,17
   d. 0,20
   e. 0,51

   <u>Penyelesaian:</u>

   Diketahui: V adalah banyak klaim dalam satu tahun yaitu V = 100000Y dimana Y adalah variabel random dengan fungsi densitas $f(y) = \begin{cases} k(1-y)^4, untuk\ 0 < y < 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$, dimana k adalah konstan

   Ditanya: $P(V > 40000|V > 10000)$

   Jawab:

   Ditentukan nilai k, dengan menyelesaiakn persamaan $\int_0^1 k(1-y)^4 dy = 1$, diperoleh $k = 5$

   Karena $P(V > 40000|V > 10000) = \frac{P(V>40000 \cap V>10000)}{P(V>10000)} = \frac{P(V>40000)}{P(V>10000)}$

   Ditentukan

   $$P(V > 40000) = P(100000Y > 40000) = P(Y > 0,4) = \int_{0,4}^1 5\,(1-y)^4 dy = (0,6)^5$$

   $$P(V > 10000) = P(100000Y > 10000) = P(Y > 0,1) = \int_{0,1}^1 5\,(1-y)^4 dy = (0,9)^5$$

   Diperoleh

   $P(V > 40000|V > 10000) = \frac{P(V>40000)}{P(V>10000)} = \frac{(0,6)^5}{(0,9)^5} = 0,132.$

   Jadi jawaban yang benar adalah B.

4. Suatu perusahaan asuransi mencover beberapa rumah. Jika X adalah rumah yang diasuransikan terpilih secara random dan memiliki fungsi densitas

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, untuk\ x > 1 \\ 0, yang\ lain \end{cases}$$

Dari rumah yang diasuransikan lebih dari 1,5, tentukan probabilitas rumah yang diasuransikan kurang dari 2

a. 0,578

b. 0,684

c. 0,704

d. 0,829

e. 0,875

Penyelesaian:

Diketahui: X adalah rumah yang diasuransikan terpilih secara random dan memiliki fungsi densitas $f(x) = \begin{cases} 3x^{-4}, untuk\ x > 1 \\ 0, yang\ lain \end{cases}$

Ditanya: $P(X < 2|X \geq 1{,}5)$

Jawab:

Karena $P(X < 2|X \geq 1{,}5) = \frac{P(X<2 \cap X \geq 1{,}5)}{P(X \geq 1{,}5)} = \frac{P(1{,}5 \leq X < 2)}{P(X \geq 1{,}5)}$

Karena $P(1{,}5 \leq X < 2) = \int_{1{,}5}^{2} 3x^{-4} dx = 0{,}17130$ dan

Karena $P(X \geq 1{,}5) = \int_{1{,}5}^{\infty} 3x^{-4} dx = 0{,}29630$, maka

$P(X < 2|X \geq 1{,}5) = \frac{P(1{,}5 \leq X < 2)}{P(X \geq 1{,}5)} = \frac{0{,}17130}{0{,}29630} = 0{,}578$.

Jadi jawaban yang benar adalah A.

5. Suatu perusahaan asuransi menjual 10.000 produknya yang menanggung kematian dan 500 *one premium time*, yang dijual kepada pasangan suami istri yang berlaku selama 10 tahun. Probabilitas hanya istri yang *survive* dalam kurun waktu 10 tahun adalah 0,025, probabilitas hanya suami yang *survive* dalam kurun waktu 10 tahun adalah 0,01, dan peobabilitas keduanya *survive* dalam kurun waktu 10 tahun adalah 0,96. Dari kemungkinan hanya suami yang *survive* dalam waktu 10 tahun, tentukan jumlah klaim *one premium time*
   a. 350
   b. 385
   c. 397
   d. 870
   e. 897

   Penyelesaian:

   Ditentukan I = adalah kejadian hanya istri yang survive, S = kejadian hanya suami yang survive

   Diketahui: $P(I \cap S^C) = 0{,}025; P(I^C \cap S) = 0{,}01$ dan $P(I \cap S) = 0{,}96$

   Ditanya: Dari kemungkinan hanya suami yang *survive* dalam waktu 10 tahun, tentukan jumlah klaim *one premium time*

   Jawab:

   Perhatikan dari suami yang survive dalam 10 tahun, probabilitas istri survive dalam 10 tahun adalah $P(I|S) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}96}{P(S)}$, sehingga $P(S) = 0{,}96\ P(I|S)$

   Sedangakan $P(I^C|S) = \frac{P(I^C \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}01}{P(S)}$, sehingga $P(S) = 0{,}01\ P(I^C|S)$

   Karena $P(I^C \cap S) = 0{,}01$ dan $P(I \cap S) = 0{,}96$, maka $P(S) = 0{,}01 + 0{,}96 = 0{,}97$

   Dari suami yang survive selama kurun waktu 10 tahun, terdapat 0 klaim jika istri survive dalam kurun waktu 10 tahun , atau terdapat 10.000 klaim jika istri tidak survive dalam waktu 10 tahun, sehingga dari kemungkinan yang survive hanya suami, jumlah klaimnya adalah $(0)P(I|S) + (10.000)P(I^C|S) = 10.000\left(\frac{1}{97}\right) = 103{,}09$. Total *one premium time* adalah 1000, sehingga dari kemungkinan hanya suami yang survive, total kalim *one premium time* adalah 1000 – 103,09 = 897. Jadi jawaban yang benar adalah E

6. Kerugian pembayaran terhadap kebakaran dalam suatu bangunan komersil dimodelkan dengan suatu variabel random X yang mempunyai fungsi densitas

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}005(20 - x), untuk\ 0 < x < 20 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

Dari kerugian kebakaran lebih dari 8, tentukan probabilitas kerugain pembayaran kurang dari 16

a. $\frac{1}{25}$

b. $\frac{1}{9}$

c. $\frac{1}{8}$

d. $\frac{1}{3}$

e. $\frac{3}{7}$

<u>Penyelesaian:</u>

Ditentukan variabel andom X = kejadian kerugian pembayaran kebakaran gedung komersil

Diketahui:

Kerugian pembayaran terhadap kebakaran dalam suatu bangunan komersil dimodelkan dengan suatu variabel random X yang mempunyai fungsi densitas $f(x) = \begin{cases} 0{,}005(20 - x), untuk\ 0 < x < 20 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$

Ditanya: $P(X > 16|X > 8)$

Jawab:

Karena $P(X > 16|X > 8) = \frac{P(X>16)}{P(X>8)}$, harus ditentukan $P(X > 16)$ dan $P(X > 8)$

Karena $P(X > 16) = \int_{16}^{20} 0{,}005(20 - x)dx = 0{,}36$ dan karena

$P(X > 8) = 0{,}04$, maka

$P(X > 16|X > 8) = \frac{P(X>16)}{P(X>8)} = \frac{0{,}04}{0{,}36} = \frac{1}{9}$. Jadi jawaban yang benar adalah B

7. Usia layak pakai suatu mesin mempunyai distribusi variabel kontinu pada interval (0,40) dengan fungsi denitas f, dimana $f(x) = c(10+x)^{-2}$. Tentukan probabilitas usia layak pakai mesin kurang dari 6
   a. 0,04
   b. 0,15
   c. 0,47
   d. 0,53
   e. 0,94

   Penyelesaian:

   Diketahui: Usia layak pakai suatu mesin mempunyai distribusi variabel kontinu pada interval (0,40) dengan fungsi denitas f, dimana $f(x) = c(10+x)^{-2}$

   Ditanya: $P(X < 6)$

   Jawab:

   Perhatikan untuk menentukan c diselesiakn integral tertentu berikut

   $\int_0^{40} c(10+x)^{-2}dx = c\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{50}\right) = 1$, diperoleh $c = 12{,}5$, sehingga diperoleh

   $P(X < 6) = \int_0^{6} 12{,}5(10+x)^{-2}dx = -12{,}5(10+x)^{-1}\Big|_0^6 = 0{,}46875$. Jadi jawaban yang benar adalah C

8. Untuk dua variabel random jarak antara dua distribusinya didefinisikan sebagai maksimuan dari $\underset{-\infty < x < \infty}{max} |F_1(x) - F_2(x)|$, dimana $F(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif. Tentukan jarak antara dua distribusi berikut:
   a. Uniform dengan interval $[0,1]$
   b. Pdf $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ untuk $0 < x < \infty$

   a. 0
   b. $\frac{1}{4}$
   c. $\frac{1}{2}$
   d. $\frac{3}{4}$
   e. 1

   <u>Penyelesaian:</u>

   Diketahui: jarak antara distribusi dua variabel random didefinisikan sebagai maksimuan dari $\underset{-\infty < x < \infty}{max} |F_1(x) - F_2(x)|$

   Ditanya: jarak antara Uniform dengan interval $[0,1]$ dengan pdf $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ untuk $0 < x < \infty$

   Jawab:

   Perhatikan distribusi uniform dengan interval $[0,1]$ yaitu $F_1(x) = \begin{cases} x, untuk\ 0 \le x \le 1 \\ 1, untuk\ x > 1 \end{cases}$

   Sedangkan fungsi distribusi dari pdf $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ untuk $0 < x < \infty$ yaitu

   $F_2(x) = \int_0^x \frac{1}{(x+1)^2} dx = 1 - \frac{1}{x+1}$ untuk $x > 0$. Untuk $0 \le x \le 1$,

   maka $|F_1(x) - F_2(x)| = \left| x + \frac{1}{x+1} - 1 \right|$ yang bernilai maksimum di $x = 0{,}1$ atau dititik kritisnya, untuk $x = 0$, maka $|F_1(0) - F_2(0)| = 0$ dan untuk $x = 1$, maka $|F_1(1) - F_2(1)| = \frac{1}{2}$. Sedangkan untuk $x > 1$, maka $|F_1(1) - F_2(1)| = \left|1 + \frac{1}{x+1} - 1\right| = \frac{1}{x+1}$ yang merupakan barisan menurun, sehingga jarak antara dua fungsi distribusi di atas adalah $\frac{1}{2}$. Jadi jawaban yang benar adalah C

9. Diberikan X adalah variabel random kontinu dengan fungsi densitas
$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), untuk\ 0 < x < 1 \\ 0, yang\ lain \end{cases}$. Tentukan $P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}\right)$
   a. 0,0521
   b. 0,1563
   c. 0,3125
   d. 0,5000
   e. 0,8000

   <u>Penyelesaian:</u>

   Diketahui: $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), untuk\ 0 < x < 1 \\ 0, yang\ lain \end{cases}$

   Ditanya: $P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}\right)$

   Jawab:

   Karena

   $P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{4}\right) = P\left(-\frac{1}{4} \le x - \frac{1}{2} \le \frac{1}{4}\right) = P\left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 6x(1-x)\,dx =$ 0,6875. Karena $P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{4}\right) = 0{,}6875$, maka

   $P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}\right) = 1 - P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{4}\right) = 1 - 0{,}6875 = 0{,}3125$. Jadi jawaban yang benar adalah C

10. Diberikan fungsi distribusi dari X untuk $x > 0$ adalah $F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k e^{-x}}{k!}$.
Tentukan fungsi densitas dari X untuk $x > 0$
   a. e^{-x}
   b. $\frac{x^2 e^{-x}}{2}$
   c. $\frac{x^3 e^{-x}}{6}$
   d. $\frac{x^3 e^{-x}}{6} - e^{-x}$
   e. $\frac{x^3 e^{-x}}{6} + e^{-x}$

<u>**Penyelesaian:**</u>

Diketahui: fungsi distribusi dari X untuk $x > 0$ adalah $F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k e^{-x}}{k!}$.

Ditanya: fungsi densitas dari X untuk $x > 0$

Jawab:

$$f(x) = F'(x)$$
$$= -\sum_{k=0}^{3} \frac{kx^{k-1}e^{-x} - x^k e^{-x}}{k!}$$
$$= e^{-x} \sum_{k=0}^{3} \frac{kx^{k-1} - x^k}{k!}$$
$$= e^{-x}(1 + \frac{x-1}{1} + \frac{x^2 - 2x}{2} + \frac{x^3 - 3x^2}{6})$$
$$= \frac{e^{-x}x^3}{6}$$

Jadi jawaban yang benar adalah C

11. Diketahui X mempunyai fungsi densitas $f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}$, untuk $0 < x < \theta$ dan $f(x) = 0$, untuk yang lain. Jika $P(X > 1) = \frac{7}{8}$. Tentukan nilai θ
    a. $\frac{1}{2}$
    b. $(\frac{7}{8})^{\frac{1}{3}}$
    c. $(\frac{8}{7})^{\frac{1}{3}}$
    d. $2^{\frac{1}{3}}$
    e. 2

    Penyelesaian:

    Diketahui: X mempunyai fungsi densitas $f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}$, untuk $0 < x < \theta$ dan $f(x) = 0$, untuk yang lain

    Ditanya: nilai θ, jika $P(X > 1) = \frac{7}{8}$

    Jawab:

    Karena $f(x) = 0$, untuk $x > \theta$ dan $P(X > 1) = \frac{7}{8}$, maka dapat disimpulkan $\theta > 1$. Karena $P(X > 1) = \frac{7}{8}$, maka $\int_1^{\theta} \frac{3x^2}{\theta^3} = 1 - \frac{1}{\theta^3} = \frac{7}{8}$, sehingga diperoleh $\theta = 2$. Jadi jawaban yang benar adalah E

BAB LIMA
EKSPEKTASI DAN PARAMETER DISTRIBUSI LAINNYA

5.1.Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa dapat:

1. Memahami konsep ekspektasi dan beberapa parameter distribusi lainnya
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan ekspektasi dan beberapa parameter distribusi lainnya, khususnya masalah yang berkaitan dengan aktuaria

5.2.Rangkuman Materi

a. Nilai ekspektasi variabel random sering juga disebut nilai rata-rata atau mean dan dinotasikan $E(X), \mu$ atau μ_X

b. Ekspektasi variabel random diskrit: untuk variabel random diskrit X, nilai harapan atau ekspektasi dari X didefinisikan sebagai $\sum x\, p(x) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots$, dimana X mempunyai probabilitas bukan nol

c. Ekspektasi variabel random kontinu: untuk variabel random kontinu X, nilai harapan atau ekspektasi X didefinisikan sebagai $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

d. Nilai ekspektasi $h(x)$: Jika h adalah fungsi, maka $E\big(h(x)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$, jika X adalah variabel random kontinu dan $E\big(h(x)\big) = \sum h(x)\, p(x)$, jikaX adalah variabel random diskrit

e. Momen Variabel Random: jika $n \geq 1$, momen ke-n dari X adalah $E(X^n)$. Jika mean dari X adalah μ, maka momen pusat ke-n dari X adalah $E((X-\mu)^n)$,

f. Varians dari X: Varians dari variabel random X dinotasikan $Var(X), {\sigma_X}^2$ atau σ^2 didefinisikan sebagai $Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - {\mu^2}_X$

g. Standar Deviasi dari X: Standar Deviasi variabel random X adalah akar dari varians yaitu $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

h. Fungsi pembangkit momen variabel random X dinotasikan $M_X(t), M(t), m_X(t), m(t)$ dan didefinisikan $M_X(t) = E(e^{tx})$, jika X adalah variabel random diskrit maka $M_X(t) = \sum e^{tx} p(x)$, jika X adalah variabel random kontinu maka
$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$

i. Beberapa sifat fungsi pembangkit momen sebagai berikut:

a. $M_X(0) = 1$, yaitu $M_X(0) = \sum e^{0x} p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

b. $M_X{}'(t) = E(X), M_X{}''(t) = E(X^2)$ dan $M_X{}^{(n)}(t) = E(X^n)$

dan $\frac{d^2}{dt^2} \ln(M_X(t) \Big|_t = Var\ (X)$

c. Fungsi pembangkit momen dari X mungkin tidak ada untuk semua bilangan real, tetapi selalu ada dalam beberapa interval bilangan real

j. Persentil dari suatu distribusi: Jika $0 < p < 1$, maka 100_{p-th} persentil dari distribusi X adalah bilangan c_p yang memenuhi $P(X \leq c_p) \geq p$ dan $P(X \geq c_p) \geq 1 - p$ Untuk variabel random kontinu untuk mendapatkan c_p dengan $P(X \leq c_p) = p$. Jika $p = 0{,}5$, maka persentil 50_{th} persentil juga merupakan median.

k. Mean dari variabel random X mungkin bisa tidak ada, atau $-\infty$ atau $+\infty$ dan varians X mungkin $+\infty$, misalkan untuk variabel random kontinu dengan pdf $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\ untuk\ x \geq 1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$, mempunyai nilai ekspektasi $\int_1^{\infty} x \frac{1}{x^2}\ dx = +\infty$

l. Untuk sebarang konstanta $a_1 a_2$ dan fungsi $h_1 h_2$,
$E(a_1 h_1(x) + a_2 h_2(x) + b) = a_1 E(h_1(x)) + a_2 E(h_2(x)) + b$ dan secara khusus juga berlaku $E(aX + b) = aE(X) + b$

m. Jika X variabel random yang didefinisikan pada interval $[a, \infty)(f(x) = 0,\ x < a)$, maka $E(X) = a + \int_a^{\infty} (1 - F(X))dx$, dan jika X didefinisikan pada interval $[a, b]$, dimana $b < \infty$, maka $E(X) = a + \int_a^{b} (1 - F(x))dx$. Hubungan juga berlaku untuk sebarang variabel random diskrit, kontinu ataupun campuran. Secara khusus jika X adalah non negatif variabel random, yang didefinisikan pada interval $[0, \infty)$ atau $(0, \infty)$, maka $E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(X))dx$

n. Jika a, b adalah konstanta , maka $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

o. Misalkan diberikan variabel random X, fungsi pembangkit momen $M_X(t)$ ada dalam interval saat t = 0 yaitu $\frac{d^n}{dt^n} M_X(t) \Big|_{t\,=\,0} = M_X{}^{(n)}(0) = E(X^n)$ dan $\frac{d}{dt} \ln(M_X(t)) \Big|_{t\,=\,0} = \frac{M_X{}'(0)}{M_X(0)} = E(X)$ dan $\frac{d^2}{dt^2} \ln(M_X(t)) \Big|_{t\,=\,0} = Var(X)$

p. Jika X adalah distribusi diskrit dengan ruang probabilitas $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ dan fungsi probabilitas $P(X = x_k) = p_k$, maka $M_X(t) = e^{tx_1} p_1 + e^{tx_2} p_2 + e^{tx_3} p_3 + \cdots$

q. Jika X dan Y variabel random dan $M_X(t) = M_Y(t)$ untuk semua harga dalam interval saat t = 0, maka X dan Y adalah distribusi probabilitas yang identik

5.3.Contoh Soal Dan Penyelesaiannya

1. Diketahui X adalah banyak lemparan sebuah dadu setimbang sampai muncul angka 1 pertama. Tentukan E(X)

   a. 2
   b. 3
   c. 4
   d. 5
   e. 6

   Penyelesaian:

   Diketahui: X adalah banyak lemparan sebuah dadu setimbang sampai muncul angka 1 pertama.

   Ditanya: $E(X)$

   Jawab:

   X adalah variabel random diskrit dengan $x \geq 1$. Fungsi probabilitas dari muncul 1 pertama pada lemparan sebuah dadu adalah $p(x) = (\frac{5}{6})^{x-1}(\frac{1}{6})$, untuk $x \geq 1$, sehingga

   $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, (\frac{5}{6})^{x-1}(\frac{1}{6}) \quad = \left(\frac{1}{6}\right)(1 + 2\left(\frac{5}{6}\right) + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots).$

   Ingat karena $1 + 2r + 3r^2 + \ ... = \frac{1}{(1-r)^2}$, maka

   $E(X) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(1 + 2\left(\frac{5}{6}\right) + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots\right) = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6$. Jadi jawaban yang benar adalah E

2. Sebuah dadu setimbang dilempar sampai 1 pertama muncul. Diberikan x adalah banyak lemparan, x = 1, 2, 3, ... Jika pada lemparan ke-x muncul angka 1 pertama maka mendapat $(0{,}5)^x$ dollar. Berapa harapan jumlah dolar yang akan diterima

   a. ¼
   b. 1/5
   c. 1/6
   d. 1/7
   e. 1/8

   Penyelesaian:

Diketahui: X adalah variabel random diskrit yang menyatakan banyak lemparan sampai angka 1 pertama terjadi, dan jika pada lemparan ke-x muncul angka 1 pertama maka mendapat $h(x) = (0,5)^x$ dollar

Ditanya: $E(h(x))$

Jawab:

Probabilitas muncul angka 1 pertama pada pelemparan dadu ke-x adalah $p(x) = (\frac{5}{6})^{x-1}(\frac{1}{6})$ untuk x = 1, 2, 3, ..., dan jika terjadi muncul mata dadu 1 pertama pada pelemparan ke-x dapat $h(x) = (0,5)^x$ dollar, sehingga

$E\big(h(x)\big) = E((0,5)^x) = \sum_{k=1}^{\infty}(0,5)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{5}{12} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{1}{7}$. Jadi jawaban yang benar adalah E

3. Diketahui bahwa θ adalah konstanta, dan fungsi densitas dari X adalah $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, untuk $x > 0$ dan 0 untuk yang lainnya. Tentukan moment ke-n, dimana n adalah bilangan non negatif ($\theta > 0$)

   a. $\frac{n!}{\theta^n}$
   b. $\frac{(n+1)!}{\theta^n}$
   c. $\frac{n!}{(\theta+1)^n}$
   d. $\frac{(n-1)!}{\theta^n}$
   e. $\frac{n!}{(\theta-1)^n}$

Penyelesaian:

Diketahui: $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, untuk $x > 0$ dan 0 untuk yang lainnya

Ditanya: $E(X^n)$

Jawab:

Karena $\int_0^{\infty} t^k e^{-\alpha t} dt = \frac{k!}{\alpha^{k+1}}$, maka

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \int_0^{\infty} x^n \theta e^{-\theta x} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^n d\big(-e^{-\theta x}\big) \\ &= -x^n e^{-x\theta} \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} -n x^{n-1} e^{-x\theta} dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty nx^{n-1}e^{-x\theta}dx = \frac{n!}{\theta^n}.$$

Jadi jawaban yang benar adalah A

4. Variabel random X mempunyai fungsi densitas

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, jika\ |x|<1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

Dan variabel random W dengan fungsi densitas

$$f(w) = \begin{cases} 0{,}5-0{,}25|w|, jika\ |w|<2 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

Tentukan variansi X dan W

a. 1/6 dan 2/3

b. 1/5 dan 2/3

c. 1/6 dan 2/5

d. 1/6 dan ¾

e. ¾ dan 2/5

Penyelesaian:

Diketahui:

Variabel random X dengan pdf $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, jika\ |x|<1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$,

sedangkan variabel W dengan pdf $f(w) = \begin{cases} 0{,}5-0{,}25|w|, jika\ |w|<2 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$

Ditanya: Var (X) dan Var (W)

Jawab:

Perhatikan bahwa fungsi densitas $f(x) = f(-x)$, maka $E(X) = 0$

Karena $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, jika\ |x|<1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$, maka $f(-x) = 1-|-x| = 1-|x| = f(x)$, sehingga $E(X) = 0$, dibuktikan

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x(1-|x|)dx = \int_{-1}^{0} x(1-|x|)dx + \int_{0}^{1} x(1-|x|)dx = -\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = 0$$

Karena $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, jika\ |x|<1 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$, maka

$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}$. Sehingga

$Var\ (X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$.

Untuk menentukan Var (W), harus ditentukan

$$E(W) = \int_{-2}^{2} x(0{,}5 - 0{,}25|x|)dx$$
$$= \int_{-2}^{0} x(0{,}5 - 0{,}25|x|)dx + \int_{0}^{2} x(0{,}5 - 0{,}25|x|)dx$$
$$= -\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = 0$$

Dan

$$E(W^2) = \int_{-2}^{2} x^2(0{,}5 - 0{,}25|x|)dx$$
$$= \int_{-2}^{0} x^2(0{,}5 - 0{,}25|x|)dx + \int_{0}^{2} x^2(0{,}5 - 0{,}25|x|)dx$$
$$= \int_{-2}^{0} x^2(0{,}5 + 0{,}25x)dx + \int_{0}^{2} x^2(0{,}5 - 0{,}25x)dx$$
$$= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}$$
$$Var(W) = E(W^2) - ((E(W))^2 = \frac{2}{3}$$

Jadi jawaban yang benar adalah A

5. Diketahui pdf dari X yaitu $f(x) = 5e^{-5x}$ untuk $x > 0$. Tentukan fungsi pembangkit momen dari X dan tentukan momen kedua dari X dan varians X
   a. 2/25 dan 1/25
   b. 3/25 dan 2/25
   c. 4/25 dan 1/5
   d. 2/25 dan 4/25
   e. 3/25 dan 1/25

   <u>Penyelesaian:</u>

   Diketahui: pdf dari X yaitu $f(x) = 5e^{-5x}$ untuk $x > 0$

   Ditanya: $E(X^2)$ dan $Var(X)$

   Jawab:

   Karena $\int_0^\infty e^{-at}\, dt = \frac{1}{a}\ jika\ a > 0$, maka

   Ditentukan $M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} 5e^{-5x} dx = 5\int_0^\infty e^{-(5-t)x} dx = \frac{5}{5-t}$

   $E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t\,=\,0} = M_X{}'(0) = \frac{5}{(5-0)^2} = \frac{1}{5}$,

   $E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\Big|_{t\,=\,0} = M_X{}''(0) = \frac{2.5}{(5-0)^3} = \frac{2}{25}$,

   $Var(X) = E(X^2) - E((X))^2 = \frac{1}{25}$.

   Jadi jawaban yang benar adalah A

6. Tentukan fungsi pembangkit momen dari masing-masing variabel random berikut

   a. X = adalah hasil pelemparan dadu setimbang, $p(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}$

   untuk $x = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6$,

   b. X adalah variabel random kontinu dengan fungsi densitas $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < 1 \\ 0, yang\ lain \end{cases}$

   Penyelesaian:

   a. $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{6} e^{tx} p(x)$

   $$= e^t.\frac{1}{6} + e^{2t}.\frac{1}{6} + e^{3t}.\frac{1}{6} + e^{4t}.\frac{1}{6} + e^{5t}.\frac{1}{6} + e^{6t}.\frac{1}{6}$$

   $$= \frac{1}{6} e^t (\frac{e^{6t}-1}{e^t-1})$$

   $M_X{}'(t) = e^t.\frac{1}{6} + 2e^{2t}.\frac{1}{6} + 3e^{3t}.\frac{1}{6} + 4e^{4t}.\frac{1}{6} + 5e^{5t}.\frac{1}{6} + 6e^{6t}.\frac{1}{6}$, ditentukan

   $E(x) = M_X{}'(0)$

   $= e^0.\frac{1}{6} + 2e^{2(0)}.\frac{1}{6} + 2e^{3(0)}.\frac{1}{6} + 4e^{4(0)}.\frac{1}{6} + 5e^{5(0)}.\frac{1}{6} + 6e^{6(0)}.\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$ dan

   $M_X{}''(t) = e^t.\frac{1}{6} + 2^2 e^{2t}.\frac{1}{6} + 3^2 e^{3t}.\frac{1}{6} + 4^2 e^{4t}.\frac{1}{6} + 5^2 e^{5t}.\frac{1}{6} + 6^2 e^{6t}.\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$, sehingga

   $Var(X) = \frac{91}{6} - (\frac{7}{2})^2 = \frac{35}{12}$.

   b. $M_X(t) = \int_0^1 e^{tx}.2x\,dx = 2(\frac{xe^{tx}}{t} - \frac{e^{tx}}{t^2}) \Big|_{x=0}^{x=1}$, sehingga

   $M_X{}'(t) = 2\left(\frac{te^t - e^t}{t^2} - \frac{t^2e^t - 2te^t + 2t}{t^4}\right) = 2(\frac{t^2e^t - 2te^t + 2e^t - 2}{t^3})$, sehingga

   $E(x) = M_X{}'(0) = \lim_{t \to 0} 2\left(\frac{t^2e^t - 2te^t + 2e^t - 2}{t^3}\right) = \frac{2}{3}$.

7. Diberikan fungsi pembangkit momen dari X adalah $\frac{\alpha}{\alpha - t}$ untuk $t < \alpha$, dimana $\alpha > 0$. Tentukan Var(X)

   a. $\frac{1}{\alpha^2}$

   b. $\frac{1}{\alpha^3}$

   c. $\frac{1}{\alpha^4}$

   d. $\frac{1}{\alpha^5}$

   e. $\frac{1}{\alpha^6}$

   Penyelesaian:

   Diketahui: $M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}$ untuk $t < \alpha$, dimana $\alpha > 0$

Ditanya: Var(X)

Jawab:

Karena $Var(X) = E(X^2) - E((X))^2$, maka ditentukan terlebih dahulu

$\frac{d}{dt}\ln(M_X(t)) = \frac{1}{\alpha-t}$, dan $\frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_X(t)\right) = \frac{1}{(\alpha-t)^2}$, sehingga

$Var(X) = \frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_X(t)\right)\Big|_{t\,=\,0} = \frac{1}{\alpha^2}$.

8. Diberikan variabel kontinu X dengan pdf $f(x) = \frac{1}{2}.e^{-|x|}$ untuk $-\infty < x < \infty$. Tentukan persentil ke 87,5 dari distribusi tersebut
   a. $ln2$
   b. $ln3$
   c. $ln4$
   d. $ln5$
   e. $ln6$

   <u>Penyelesaian:</u>

   Diketahui: variabel kontinu X dengan pdf $f(x) = \frac{1}{2}.e^{-|x|}$ untuk $-\infty < x < \infty$.

   Ditanya: persentil ke 87,5 dari distribusi

   Jawab:

   Untuk menentukan persentil ke-87,5 harus ditentukan b sedemikian sehingga $0{,}875 = P(X \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{2}.e^{-|x|}dx$. Perhatikan karena fungsi ditribusi adalah simetrik untuk 0, yaitu $f(-x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} = f(x)$, jadi median dan mean bernilai 0. Untuk $b > 0$, berlaku

   $$\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{2}.e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}.e^{-|x|}dx + \int_{0}^{b} \frac{1}{2}.e^{-|x|}dx$$
   $$= 0{,}5 + \frac{1}{2}\int_{0}^{b} e^{-x}dx$$
   $$= 0{,}5 + \frac{1}{2}(1 - e^{-b}) = 0{,}875,\text{ sehingga diperoleh}$$

   $b = -\ln(0{,}25) = -\ln\left(\frac{1}{4}\right) = ln4$. Jadi jawaban yang benar adalah C

9. Skewnes dari sebuah variabe random didefinisikan $\frac{E((X-\mu)^3)}{\sigma^3}$ dimana $\mu = E(X)$ dan $\sigma^2 = Var(X)$. Tentukan skewnes dari variabel random X dengan pdf

   $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < 1 \\ 0, yang\ lain \end{cases}$

a. -0,566
b. -0,466
c. -0,366
d. -0,266
e. -0,166

Penyelesaian:

Diketahui: Skewnes dari sebuah variabe random didefinisikan $\frac{E((X-\mu)^3)}{\sigma^3}$ dimana $\mu = E(X)$ dan $\sigma^2 = Var(X)$

Ditanya: Tentukan skewnes dari variabel random X dengan pdf $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < 1 \\ 0, yang\ lain \end{cases}$

Jawab:

Ditentukan

$\mu = E(X) = \int_0^1 x(2x)dx = \frac{2}{3}$, dan

$E(X^2) = \int_0^1 x^2(2x)dx = \frac{1}{2}$, sehingga $\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}$, maka

$E((X-\mu)^3) = E\left(\left(X - \frac{2}{3}\right)^3\right) = \int_0^1 \left(X - \frac{2}{3}\right)^3 .(2x)dx$

$= \int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}\right)(2x)dx = -\frac{1}{135}$, sehingga diperoleh

$\frac{E((X-\mu)^3)}{\sigma^3} = \frac{-\frac{1}{135}}{(\frac{1}{18})^{\frac{3}{2}}} = -0{,}566$. Jadi jawaban yang benar adalah A

5.4.Lembar Kerja Mahasiswa (LKM)

1. Jika X adalah variabel random dengan fungsi kepadatan $f(x) = \begin{cases} 1{,}4e^{-2x} + 0{,}9e^{-3x}, untuk\ x > 0 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$, tentukan $E(X)$

   a. 9/10

   b. 5/6

   c. 1

   d. 230/126

   e. 23/10

   <u>Penyelesaian:</u>

   Diketahui: ....

   ....

   ....

   Ditanya: ....

   ....

   Jawab:...

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Diketahui X adalah variabel random kontinu dengan fungsi densitas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}x(1+3x), untuk\ 1 < x < 3 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

Tentukan $E(\frac{1}{X})$

a. 1/12
b. 7/15
c. 45/103
d. 11/20
e. 14/15

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui: ....
....
....

Ditanya: ....
....

Jawab:..
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. Diketahui X variabel random kontinu dengan fungsi densitas

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{10}, untuk -2 \leq x \leq 4 \\ o, untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

Tentukan nilai ekspektasi dari X

a. 1/5
b. 3/5
c. 1
d. 28/15
e. 12/5

Penyelesaian:

Diketahui: ....

....

....

Ditanya: ....

....

Jawab:..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Diketahui variabel random kontinu X dengan fungsi densitas

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2{,}5(200)^{2{,}5}}{x^{3{,}5}}, untuk\ x \geq 200 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

Tentukan perbedaan antara persentil ke-30 dan ke-70 dari X

a. 35

b. 93

c. 124

d. 131

e. 298

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui: ....

....

....

Ditanya: ....

....

Jawab:..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. Diketahui variabel random kontinu X dengan pdf $f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, untuk\ x > 0 \\ 0, yang\ lain \end{cases}$. Jika median dari distribusi tersebut adalah $\frac{1}{3}$. Tentukan nilai β

   a. $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
   b. $\frac{1}{3}\ln 2$
   c. $2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$
   d. $3ln2$
   e. 3

   Penyelesaian:

   Diketahui: ....
   ....
   ....

   Ditanya: ....
   ....

   Jawab:..
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

6. Diketahui X variabel random kontinu dengan pdf $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x(4-x), untuk\ 0 < x < 3 \\ 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$, tentukan modus dari X

   a. 4/9
   b. 1
   c. 3/2
   d. 7/4
   e. 2

   Penyelesaian:

   Diketahui: ....

   ....

   ....

   Ditanya: ....

   ....

   Jawab:..

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

7. Hasil penelitian menunjukkan bahwa biaya tahunan perawatan dan perakitan suatu mobil di kota Ontario memiliki rata-rata 200 dengan varians 260. Jika pajak suatu mobil 20% untuk semua jenis mobil termasuk perawatan dan perakitan mobil, tentukan varians dari biaya tahunan perawatan dan perakitan mobil
   a. 208
   b. 260
   c. 270
   d. 312
   e. 374

   Penyelesaian:

   Diketahui: ....
   ....
   ....

   Ditanya: ....
   ....

   Jawab:..
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

8. Seorang aktuaris menentukan banyak klaim dari sejumlah kecelakaan yang didefinisikan sebagai variabel random X, dengan fungsi pembangkit momen $M_X(t) = \frac{1}{(1-2500t)^4}$. Tentukan standar deviasi dari jumlah klaim untuk sejumlah kecelakaan tersebut.

   a. 1,340
   b. 5,000
   c. 8,600
   d. 10,000
   e. 11,180

   Penyelesaian:

   Diketahui: ....

   ....

   ....

   Ditanya: ....

   ....

   Jawab:...

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

9. Jika fungsi pembangkit momen untuk variabel random X adalah $M_X(t) = \frac{1}{1+t}$.

   Tentukan moment ke-3 dari X dititik x = 2

   a. 1/3
   b. 2/3
   c. 3/2
   d. -38
   e. -19/3

   Penyelesaian:

   Diketahui: ....

   ....

   ....

   Ditanya: ....

   ....

   Jawab:...

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

10. X dan Y adalah variabel random dengan fungsi pembangkit momen $M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$. Diketahui W = X+Y dan Z = X – Y. Tentukan fungsi pembangkit momen $M(\quad,\quad)$ dari W dan Z

a. $e^{2t_1{}^2+2t_2{}^2}$

b. $e^{(t_1-t_2)^2}$

c. $e^{(t_1+t_2)^2}$

d. $e^{2t_1t_2}$

e. $e^{t_1{}^2+t_2{}^2}$

Penyelesaian:

Diketahui: ....

....

....

Ditanya: ....

....

Jawab:...

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

11. Diketahui $X_1, X_{2,} X_3$ adalah variabel random dengan fungsi probabilitas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, untuk\ x = 0 \\ \frac{2}{3}, untuk\ x = 1 \\ 0, untuk\ yan\ lain \end{cases}$$

Tentukan fungsi pemabngkit momen dari $Y = X_1 X_2 X_3$

a. $\frac{19}{27} + \frac{8}{27} e^t$

b. $1 + 2e^t$

c. $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^t)^3$

d. $\frac{1}{27} + \frac{8}{27} e^t$

e. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^t$

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui: ....

....

....

Ditanya: ....

....

Jawab:..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

12. Seorang aktuaris memodelkan klaim bulanan sebagai variabel random kontinu positif dengan pdf $(1+x)^{-4}$, dimana $0 < x < \infty$. Tentukan nilaiekspektasi dari klaim bulanan tersebut

    a. 1/6

    b. 1/3

    c. ½

    d. 1

    e. 3

    Penyelesaian:

    Diketahui: ....

    ....

    ....

    Ditanya: ....

    ....

    Jawab:...

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

    ....

13. Suatu variabel random mempunyai fungsi distribusi kumulatif

$$F(x) = \begin{cases} 0, untuk\ x < 1 \\ \dfrac{x^2 - 2x + 2}{2}, untuk\ 1 \le x < 2 \\ 1, untuk\ x > 2 \end{cases}$$

Tentukan varians dari X

a. 7/72
b. 1/8
c. 5/36
d. 4/32
e. 23/12

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui: ....

....

....

Ditanya: ....

....

Jawab:...

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....