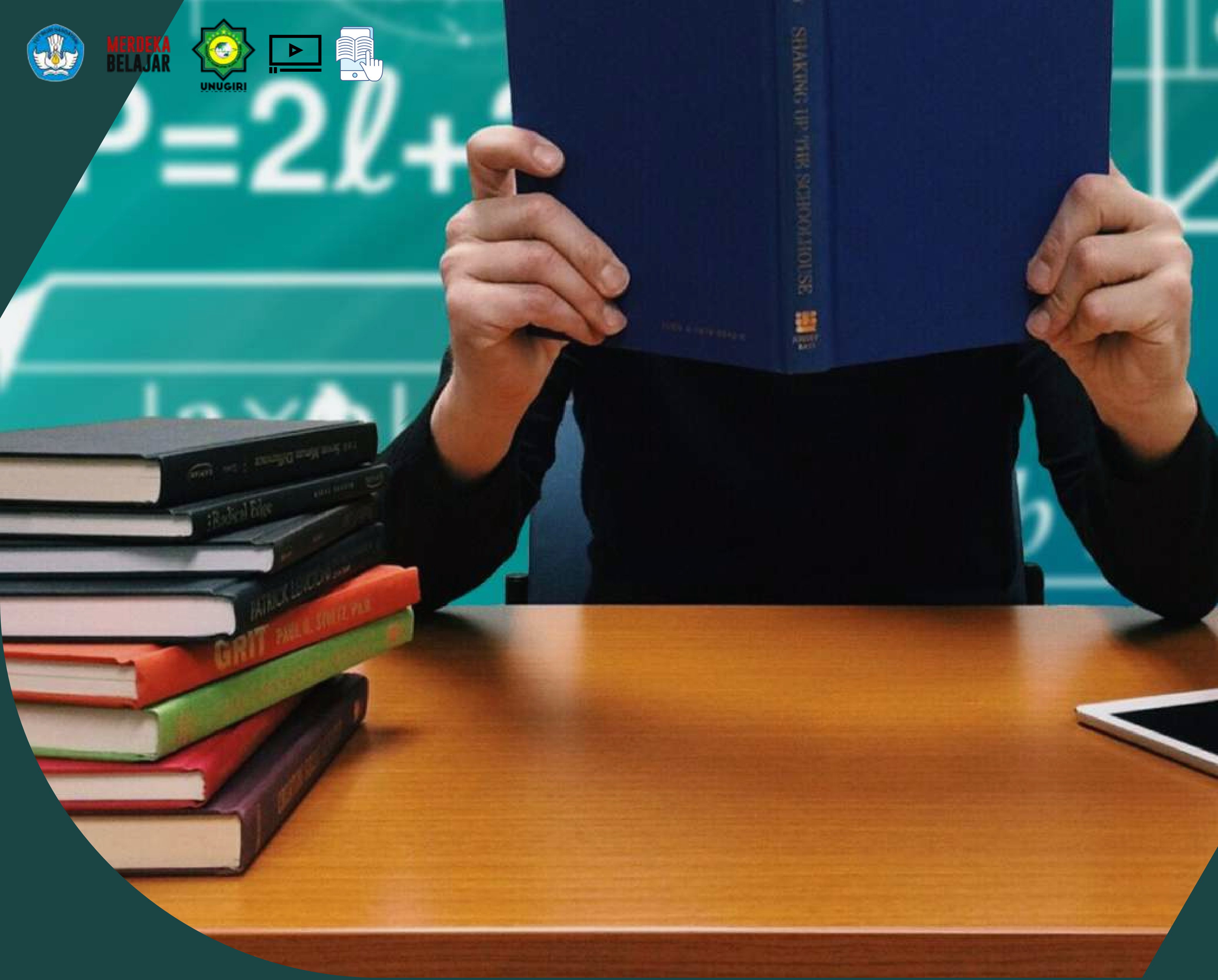


Modul Pembelajaran

Untuk SMK

MATEMATIKA MATRIKS

Nandani Nur Ratna Sari, S.Pd

Astrid Chandra Sari, M.Pd., Festian Cindarbumi, M.Pd

Matematika

Untuk Kelas X SMK

Semester Genap

Nandani Nur Ratna Sari

Matematika X

Untuk SMK

Editor	: Nandani Nur Ratna sari
Pembimbing I	: Astrid Chandra Sari, M.Pd
Pembimbing II	: Festian Cindarbumi, M.Pd
Validasi Materi	: Naning Kurniawati, M.Pd
Validasi Bahasa	: M. Iqbal Tawakkal, M.Pd
Validasi Media	: Rahmat Irsyada, M.Pd

KATA PENGANTAR

Puji Syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas limpahan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan bahan ajar modul untuk peserta didik kelas X SMK . Modul ini dilengkapi dengan penjelasan materi dengan video penjelasan dan materi tulis. Modul ini juga dilengkapi dengan latihan soal untuk menguji pemahaman siswa terkait dengan materi yang terdapat pada modul. Dalam modul ini akan dibahas tentang materi “Matriks”.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penyusunan modul ini. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan dan kesempurnaan modul ini.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu proses penyelesain modul ini, terutama dosen pembimbing 1 Ibu Astrid Chandra Sari, M.Pd, Dosen pembimbing 2 Bapak Festian Cindarbumi, M.Pd yang telah membimbing penyusun dalam pembuatan modul ini. Semoga modul ini dapat bermanfaat bagi kita semua, khususnya para peserta didik dengan tujuan untuk menyederhannakan pembelajaran matriks dan dapat dengan mudah diakses melalui digital untuk membantu kegiatan belajar mengajar dengan bentuk cetak.

Penulis

Unugiri Bojonegoro,
Jl. Ahmad Yani No.10, Bojonegoro

nandaninurratnasari@gmail.com

Modul ini dapat diakses secara digital dengan scan barcode di samping

SCAN ME

https://bit.ly/nmodulmatriks

DAFTAR ISI

halaman

PENGERTIAN MATRIKS

Menurut Huward Anton (1997)

Matriks merupakan susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dari matriks. Entri di baris i dan kolom j dinotasikan dengan a_{ij}, dengan susunan skalar (bilangan) yang diatur dala baris dan kolom.

Ukuran matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom yang terkandung didalamnya. Untuk menyatakan atau memberi nama sebuah matriks sama seperti halnya sebuah hipunan, yaitu diberi nama dengan memakai hufut capital (huruf besar) A, B, X, Y dan sebagainya. Sedangkan unsur-unsur atau elemen-elemen atau komponen, yaitu bilangan-bilangan yang disusun di dalamnya, bila akan dimisalka kita lambangkan dengan huruf kecil.

Secara umum, matriks $m \times n$ ditulis :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh matriks

$$A_{3\times2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B_{2\times3} = \begin{bmatrix} a & 4 & 5 \\ 3 & b & 2 \end{bmatrix}$$

Sebuah matriks adalah sebuah susunan bilangan berbentuk persegi panjang. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut disebut entri dari matriks. Entri di baris i dan kolom j dinotasikan dengan a_{ij}. Matriks merupakan susunan skalar (bilangan) yang berbentuk segi empat siku-siku yang diatur dalam baris dan kolom.

Jenis - Jenis Matriks

Matriks dibedakan berdasarkan berbagai susunan Matriks dibedakan berdasarkan berbagai susunan entri dan bilangan pada entrinya. Sehinngga matriks dibedakan sebagai berikut :

1. Matriks Nol

Matriks nol didefinisikan sebagai matriks yang setiap entri atau elemennya adalah bilangan nol.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Satu/ Vektor Satu

Matriks satu didefinisikan sebagai matriks yang setiap entri atau elemennya adalah 1.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Baris/ Vektor Baris

Matriks baris didefinisikan sebagai matriks yang entri atau elemennya tersusun dalam tepat satu baris.

Contoh :

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 10 & -6 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Kolom

Matriks kolom didefinisikan sebagai matriks yang entri atau elemennya tersusun dalam tepat satu kolom.

Contoh :

$$K = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

5. Matriks Persegi

Sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan matriks kuadrat berorde n (square matriks of order n) dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ berada pada diagonal utama dari A.

Contoh :

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

a. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang entri/ elemennya memenuhi syarat

$$a_{ij} \begin{bmatrix} a_{ij}\ untuk\ i \\ 0\ untuk\ i \end{bmatrix} \begin{matrix} j \\ j \end{matrix}$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

b. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegii yang entri/elemennya memenuhi syarat

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

c. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang entri/elemennya memenuhi syarat

$$a_{ij} \begin{bmatrix} 0\ untuk\ i \\ a_{ij}\ untuk\ i \\ 0\ untuk\ i \end{bmatrix} \begin{matrix} j \\ j \\ j \end{matrix}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

c. Matriks Identitas

Matriks Identitas adalah matriks skalar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai I

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transpos Matriks

Dalam sebuah Matriks A dimana $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

setiap baris dari matriks A dapat diubah menjadi kolom dan juga sebaliknya setiap kolom dari matriks A menjadi barisdari suatu matriks yang baru misalnya matriks B, maka matriks B disebut transpos dari matriks A yang ditulis :

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

maka transpos matriks B

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Kesamaan Matriks

Dua matriks A dan B dikatakan sama (ditulis A = B) jika ordonya sama dan unsur-unsur yang seletak (yang berkorespondensi) sama. Dari kalimat di atas, jelaslah bahwa dua matriks itu sama jika dan hanya jika matriks yang satu merupakan duplikat dari matriks yang lainnya. Jadi dua matriks A = $[a_{ij}]$ dan B = $[b_{ij}]$ adalah sama, jika dan hanya jika :

1. Ordo matriks A = ordo matriksB, dengan kata lain matriks A dan matriks B sederajat,
2. a_{ij} = b_{ij} untuk setiap nilai i dan j, atau unsur (i,j) dari A sama dengan unsur (i,j) dari B.

Contoh :

Carilah nilai x dan y dari persamaan matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & y & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena kedua matriks itu sama maka selain ordonya sama, unsur-unsur yang seletaknya juga sama, maka :

$2x = 4$

$x = 2$

dan $y = 7$

latihan Soal 1

1. Diketahui Matriks,

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{dan,} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. Ordo matriks A,

b. Ordo matriks B

c. Entri matriks a_{12}dan aa_{22}

d. Entri matriks b_{12} dan b_{23}

e. banyaknya elemen pada matriks A

f. banyaknya elemen pada matriks B

2. Diketahui Matriks,

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{dan,} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas tunjukkan Transpos

a. Transpos matriks A^T

b. Transpos matriks B^T

NAMA:

KELAS:

TANGGAL:

NILAI:

LEMBAR JAWABAN

latihan Soal 2

1. Diketahui matriks - matriks berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ \frac{8}{2} & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -2 \\ 4 & \frac{8}{2} \end{bmatrix}$$

   a. Buktikan bahwa matriks $A = B$
   b. Buktikan bahwa matriks $A = C$
   c. Buktikan bahwa matriks $A = D$
   d. Buktikan bahwa matriks $C = B$
   e. Buktikan bahwa matriks $C = D$

2. Diketahui matriks-matriks berikut

$$P = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \text{dan} \qquad Q = \begin{bmatrix} 3x & 9 \\ 8 & 2y \end{bmatrix}$$

   Jika det P = det Q, tentukan nilai-nilai x yang memenuhi persamaan tersebut.

NAMA:

KELAS:

TANGGAL:

NILAI:

LEMBAR JAWABAN

Operasi pada Matriks

Penjumlahan pada Matriks

A. Penjumlahan dan pengurangan Matriks

Definisi :

Jika A dan B adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota A dengan aggota-anggota B yang berpadanan, dan selisih $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota A dengan anggota-aggota B yang berpadanan. Matriks-matriks yang berukuran berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangkan.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad A - B = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 8 \\ 2 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Operasi terhadap C tidak terdefinisi karena memiliki ukuran yang tidak sama.

b. Perkalian Skalar

Definisi:

Jika A adalah sebarang matriks dan c adalah sebarang skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A dengan c.

Contoh:

Untuk matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

kita akan mendapatkan

$$2A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \tfrac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(-1)B bisa juga disebut –B

b. Perkalian Pada Matriks

Definisi

Jika A adalah sebuah matriks $m \times r$ dan B adalah sebuah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang anggota-anggotanya didefinisikan sebagai berikut.

Untuk mencari anggota dala baris i dan kolom j dari AB, pilih baris i dari matriks A da kolom j dari matriks B Kalikan annggota-anggota yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Karena matriks A berukuran 2×3 dan matriks berukuran 3×4, maka hasil kali AB berukuran 2×4. Hasil kali AB adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.4 + 2.0 + 4.2 & 1.1 + 2(-1) + 4.7 & 1.4 + 2.3 + 4.5 & 1.3 + 2.1 + 4.2 \\ 2.4 + 6.0 + 0.2 & 2.1 + 6(-1) + 0.7 & 2.4 + 6.3 + 0.5 & 2.3 + 6.1 + 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

latihan Soal 3

1. Diketahui matriks - matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 11 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Hitung :

   a. $(A + B)$

   b. $(3B)$

   c. $2\ (A + B)$

2. Diketahui matriks - matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

   Hitung:

   a. $(A + B)$

   b. $(A + C)$

   c. $(B + A) - C$

   d. $(3B)$

   e. $2(A + C)$

   f. $(A \times D)$

   g. $(B \times D)$

NAMA:
KELAS:

TANGGAL:
NILAI:

LEMBAR JAWABAN

Determinan

Dengan suatu hasil kali dasar dari suatu matriks A, $n \times n$ kita akan memberikan makna pada setiap hasil kali dari n anggota dari A, yang dua diantaranya tidak ada yang berasal dari baris atau kolom yang sama. Determinan dari matriks A didefinisikan sebagai selisih antara hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dengan hasil kali elemen-elemen diagonnal sekunder

Contoh :

diagonal sekunder

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \times d) - (b \times c) = ad - bc$$

diagonal utama

Definisi determinan

Anggap A adalah suatu matriks segi empat. Fungsi determinan dinyatakan dengan det, dan kita mendifinisikan det (A) sebagai jumlah semua hasil kali dasar bertanda dari A Angka det (A) disebut determinan A

Contoh :

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4 \times (-1)) - (-3 \times 2) = 4 + 6 = 10$$

Berikut video penjelasan Determinan yang diambil dari channel youtube "Matematika Hebat"

Video penjelasan juga dapat diakses melalui link / scan pada barcode di bawah ini :

https://bit.ly/determinan-matriks1

Invers Matriks

Definisi

Jika A adalah matriks segi empat siku-siku, dan jika sebuah matriks B yang berukuran sama bisa didadapatkan sedemikian sehingga $AB = BA = I$ maka A disebut bisa dibalik dan B disebut Invers dari A

Contoh:

Matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Karena $AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ dan

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Sifat-sifat invers

Teorema 1

Jika B dan C keduanya adalah invers matriks A, maka $B = C$

Teorema ini berarti bahwa suatu matriks yang dapat dibalik mempunyai tepat satu invers.

Bukti:

Karena B adalah invers dari A, maka $BA = I$. Mengalikan ruas pada sisi kanan dengan C memberikan $(BA)C = IC = C$. tetapi $(BA)C = BI = B$, sehinngga $B = C$.

Sebagai konsekuesi dari hasil ini, kita bisa katakana bahwa matriks yang bisa dibalik memiliki invers. Jika A bisa dibalik, maka inversnya dinyatakan dengan A^{-1}. Jadi $AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$

Sifat-sifat invers

Teorema 2

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dapat dibalikjika $ad - bc \neq 0$, dimana inversnya bisa dicari dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Teorema 3

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan ukurannya sama, maka :

a) AB dapat dibalik

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bukti

Jika kita bisa menunjukkan bahwa $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I,$ maka secara simultan telah menunjukkan bahwa matriks AB dapat dibalik dan bahwa Tetapi $(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$ sebuah pendapat serupa menunjukkan bahwa $(B^{-1}A^{-1})\,(AB) = I$

latihan Soal 4

1. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Hitung :

   a. Determinan dari matriks B

   b. Invers dari matriks A

2. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

   Hitung :

   a. Determinan dari matriks B

   b. Invers dari matriks C

NAMA:
KELAS:

TANGGAL:
NILAI:

LEMBAR JAWABAN

A. Menyelesaiakan Sistem Persamaan Linier dengan Invers Matriks

Salah satu metode dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel
adalah dengan menggunakan invers matriks. Perhatikan bentuk umum dari SPL berikut:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Bentuk di atas dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks koefisien dengan variabelnya, yaitu:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ dengan } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Berikut adalah langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan invers matriks.

a. Nyatakan sistem persamaan linear tersebut ke dalam bentuk matriks.

b. Tentukan matriks koefisien dari sistem persamaan linear tersebut.

c. Tentukan invers dari matriks koefisien.

d. Gunakan konsep persamaan $AX = B$ atau $XA = B$.

Supaya Anda memahami langkah-langkah tersebut, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan metode invers matriks.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Jawab:

Langkah 1

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ misal } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ dan } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Langkah 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{maka det } A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adjoin } A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

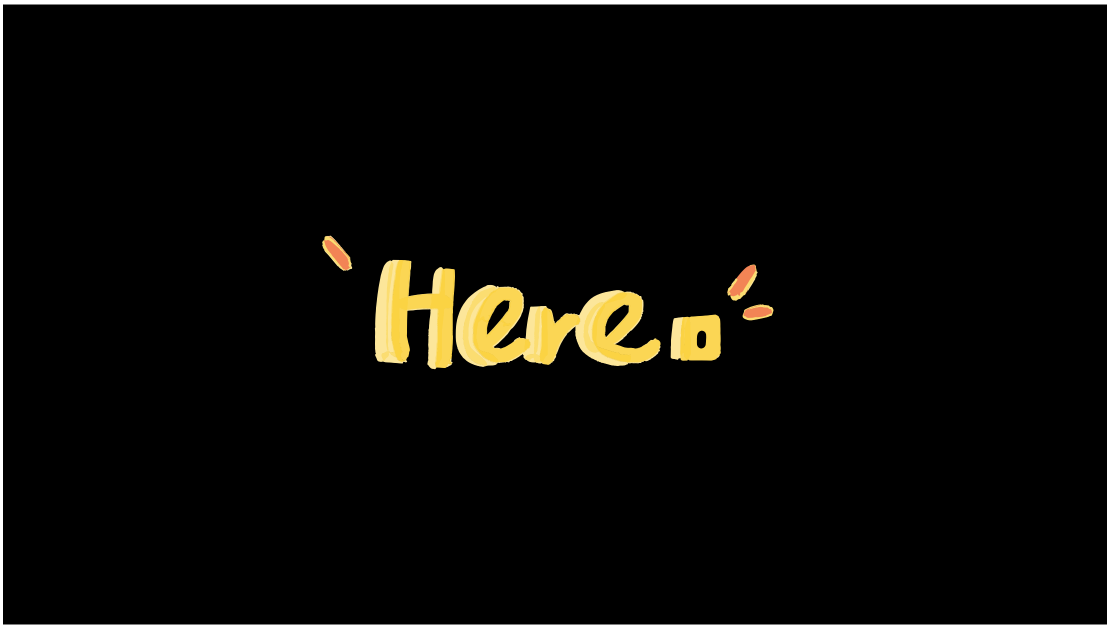
Langkah 3

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

diperoleh $x = 1$ dan $y = 2$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(1, 2)\}$.

Berikut video penjelasan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan invers matriks yang diambil dari channel youtube "Matematika Hebat"



video penjelasan juga dapat diakses melalui link / scan pada barcode di bawah ini

https://bit.ly/SPL-inversmatriks

B. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dengan Aturan Cramer

Determinan yang telah kalian pelajari, selain digunakan mencari invers dari suatu matriks, dapat pula digunakan dalam mencari penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Sistem persamaan linear tersebut jika diselesaikan akan diperoleh nilai - nilai x dan y sebagai berikut. x dan y

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Bentuk-bentuk $(c_1b_2 - c_2b_1), (a_1b_2 - a_2b_1)$ dan $(a_1c_2 - a_2c_1)$ jika dinyatakan dalam bentuk determinan adalah sebagai berikut.

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Dengan demikian nilai x dan nilai y jika dinyatakan dalam bentuk determinan adalah sebagai berikut.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ yaitu determinan dari matriks koefisien x dan y

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ yaitu determinan dari matriks koefisien x dan y yang kolom pertamanya diganti oleh konstanta c_1 dan c_2.

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ yaitu determinan dari matriks koefisien x dan y yang kolom keduanya diganti oleh konstanta c_1 dan c_2.

Berdasarkan uraian tersebut maka diperoleh kesimpulan berikut:
Jika diberikan sistem persamaan linear dua variabel

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

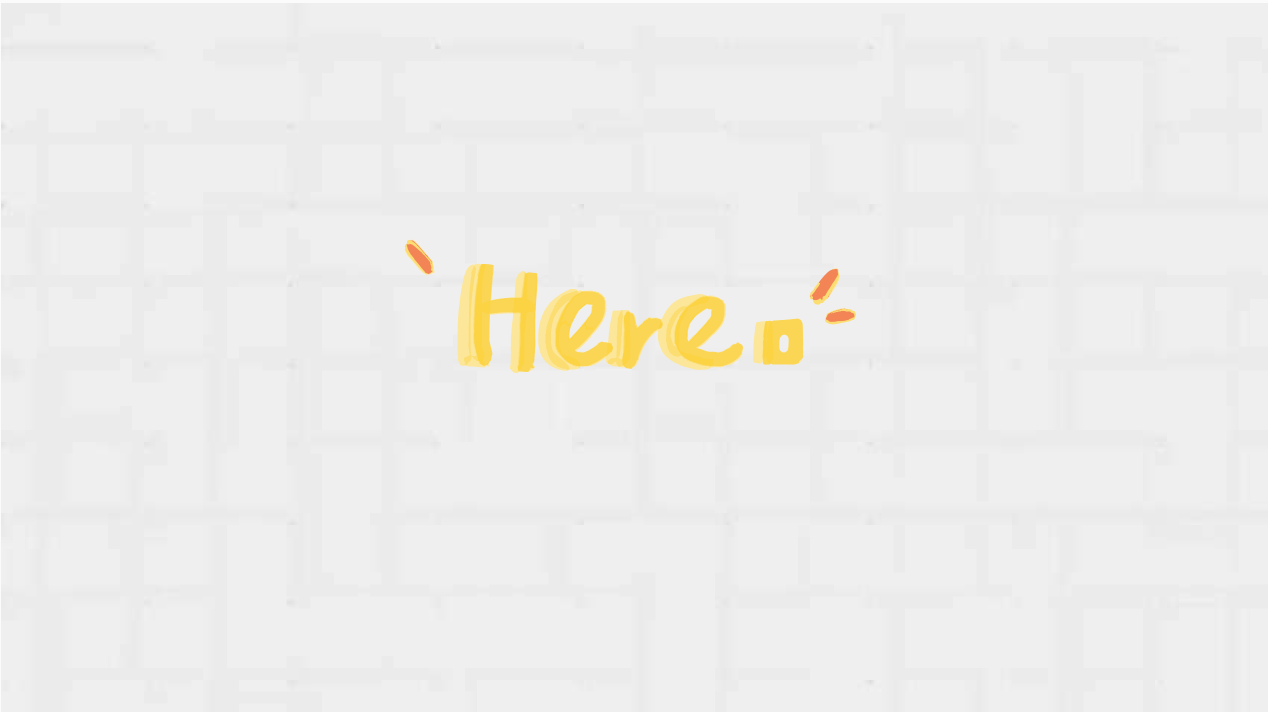
Sistem persamaan linear tersebut memiliki penyelesaian

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D} \text{, dengan } D \neq 0$$

dimana

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \; D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ dan } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Berikut video penjelasan Sistem Persamaan Linier dengan aturan Cramer yang diambil dari channel youtube "NewFaqih Channel".



video penjelasan juga dapat diakses melalui link / scan pada barcode di bawah ini

https://bit.ly/aturancramermatriks

latihan Soal 5

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan metode invers matriks.

$$\begin{cases} x - 4y = -2 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

2. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear pada matriks berikut

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$$

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan Aturan Cramer.

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$$

Daftar Pustaka

Anton, Howard. Imronna, Mahmud. 2013. *Aljabar Linier Elementer Indonesian version*, terjemahan. Jakarta: Erlangga. studocu.com

Buku Paket.com. *Matriks* https://www.google.com/urlsa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwiwoL_6gpP4AhXSX3wKHSX_AKAQFnoECAIQAQ&url=https%3A%2F%2Fsc.syekhnurjati.ac.id%2Fesscamp%2Ffiles_dosen%2Fmodul%2FPertemuan_5MAT2020341.pdf&usg=AOvVaw18BOBhIWxC-xxCTDjgRkRF

Matematika, Hebat. 2 Oktober 2021. *Sistem Persamaan Linier Dua ordo 3 x 3*. https://youtu.be/gcgLSX6e4SA

Matematika, Hebat. 18 September 2019. *Cara mudah determinan matriks Variabel Metode Invers Matriks*. https://youtu.be/P4TlQJr9R_M

Raja, Matematika TV. 6 Desember 2014. *416 Solusi SPLDV Metode Cramer*. https://youtu.be/MiBlEzr4i10

Rokhana, Siti & Cahyani, Murti. 20. *Matematika untuk X SMK/MAK. Surakarta. CV Grahadi*

Profil Penulis

Nandani Nur Ratnasari

Lahir di Bojonegoro, 26 Agustus 2000. Merupakan alumni mahasiswa di Universitas Nahdlatul Ulama Sunan Giri Bojonegoro, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan jurusan Pendidikan Matematika.

Modul ajar ini merupakan tanda terselesainya tugas akhir skripsi penulis. Penelitian pengembangan yang dilakukan dengan melibatkan tempat pengambilan data yaitu di SMKN 3 Bojonegoro dengan latar belakang dan masalah yang didapatkan saat penulis melakukan praktik kerja lapangan di tempat penelitian.

Penulis berharap dengan disusunnya modul ajar cetak dan digital ini dapat digunakan dan membantu proses belajar mengajar peserta didik baik secara tatap muka maupun online, serta desain yang dirancang oleh penulis dapat membuat peserta didik lebih bersemangat dalam belajar khususnya pada pelajaran matematika.

Semangat Belajar.....

SELALU
ADA HAL
YANG BAIK

tiap hari

Matematika merupakan salah satu mata pelajaran yang dipelajari pada setiap jenjang pendidikan dari sekolah dasar hingga perguruan tinggi. Pentingnya belajar matematika tidak terlepas dari perannya dalam berbagai aspek kehidupan. Mempelajari matematika bermanfaat untuk melatih logika dan nalar serta melatih berfikir sistematis.

Matematika
Menyenangkan